现代应用数学丛书

自动控制理论

〔日〕喜安善市　池野信一　著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

自动控制理论

〔日〕喜安善市
池野信一 著
翟立林 譯
宋健 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。本书目的是概略地介紹自动控制理論中的一个重要的方面——頻率法的理論基础和它的应用范圍。扼要地闡明了自动控制的意义和种类及其系統的特性和設計方法等。可供高等院校师生、研究工作者以及工程技术人員等参考。

現代应用数学丛书

自动控制理论

原书名 自动制御理論

原著者 〔日〕喜安善市 池野信一 著

原出版者 岩波书店 1958

譯者 翟立林

校者 宋健

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 2 16/32 字数 57,000

1962年11月第1版 1962年11月第1次印刷

印数 1—4,500

統一书号：13119・486

定价：（十四）0.46元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　录

第1章 緒　　論

§1 自动控制的意义和种类

近代人类的生活，如果沒有机械，是不可想象的。以蒸汽机的发明为开端的机械化，其发展的趋势是正在用机械力来代替一切种类的劳动力。这不仅仅意味着单单用机械力来代替人类和动物的体力，而且意味着机械以它的力量、速度以及准确性，使得人們原来认为是不可能的事情变成可能。

机械的种类很多。但是不論哪一种机械，为了使之运轉，都必須輸入火力、水力、电力以及其他形态的能。机械的作用，归根結蒂可以看作是把这种輸入的能改变成另一种适当的形态而达到某种目的。但是，仅仅輸入能还是不够的。正象在使肌肉动作时必須有神經的作用一样，在使机械运轉时必須有各种各样的操纵，或者使机械的动作开始，或者使它停止，或者使它的各个部分按照一定的順序陆續动作，或者使它随着情况的变化而改变动作状态。这种操纵通常叫作控制。当然，控制并不限于机械的系統，例如在化学工业中調节溶液的濃度和温度等也是一种控制。总之，凡是可以按照所給定的指令来使系統中的某一个物理量发生变化的，就可以认为是控制(这个物理量叫作**受控量**或**被調查量**)。

重要的是，这里所謂給定的指令是指一种信息而言，而不是指使系統动作的能源。因此，在实行控制时，大抵是必須使具有大能量的流按照具有小能量的指令而增加或减少。这种作用通常叫作放大。

在实行控制时，首先必須知道受控量应当是怎样的一个数值。这个值叫作**目标值**。目标值是由預先編制的作业計划以及时时变

化的外部条件等确定的。例如当船追捕鯨魚的时候，对应于船的方向，这个受控量的目标值将随着鯨魚的移动这个外部条件而不断地变化。

在目标值变化的情形下，当然必须对于受控量进行控制，使之与目标值相符合。有时即使是目标值并不变化，受控量由于某种外部条件而发生不必要的变化，在这种情况下，也仍然需要进行控制，以使受控量回复到原来的数值。引起这种变化的原因，通常叫作**外部扰动**。

因此，在实行控制时，归根結蒂必須加上某种控制装置，这种装置能够发出指令，使受控量根据目标值或外部扰动作必要的变化。如果能够作出这样的指令的操纵装置本身也是由机械来完成的，那么就叫作自动控制。因为这种操纵总是以某种判断作为根据，所以可以說它是脑力劳动的机械化。換句話說，相当于动物的神經的控制系統，当加上了某种程度的大脑的作用，就变成了自动控制系統。所謂自动化，不过是自动控制系統的高度利用而已。

自动控制有許多种类。首先，按照其基本的动作原理，可以分为**开路控制**和**閉路控制**。开路控制是把給定的目标值或外部扰动改变成适当的形态之后，直接作为控制的指令。例如在控制电动机的速度时，可以首先找出电流和速度的关系，然后調整电流的大小，使之刚好对应于所給定的目标值。这种方法看来好象很簡单，但是如果想一想电流和速度两者之間的关系并不一定是簡单的关系，而且要想对于电源电压或負荷的变动以及其他許多外部扰动等因素全部都圓滿地进行控制，几乎是不可能的，那就只好說要想采用这种方法来实行严格的控制是十分困难的。

与此相反，所謂閉路控制，是指把受控量同目标值互相比較，以檢測出偏差，并且使控制系統趋向于減小这种偏差而工作。这种控制，由于受控量是控制系統的輸出，而它的变动着的值又回輸

到控制系統的輸入端，所以可以叫作**反饋控制**。按照这种方法，不論造成偏差的原因是什么，控制系統总是趋向于減小偏差而工作。因此，不論函数关系如何，也不論加上怎样的外部扰动，都有可能只用一个裝置实行控制。由此可以知道，閉路控制具有很大的优越性。通常只要提到自动控制，就可以认为指的是这种控制而言。本书也是专門討論这种控制。

其次，自动控制又可以根据目标值的性质分为两类。一类是目标值固定不变的，它用来作为使温度、电压、速度等保持不变的裝置。这样的控制叫作**恒值控制**或**自动調整**，其目的完全在于消除外部扰动的影响。另一类，象在自动記录裝置、自动操纵裝置等中所应用的控制那样，目标值在随着时間变化。这种控制叫作**随动控制**或**自动追踪**。这种控制的目的当然主要是准确地追随目标值的变化。在随动控制中，还需要研究其目标值是怎样給定的。有的是由人給定的；也有的是自动地給定的。此外，也有的象自动操纵裝置等那样，其目标值是随着外部条件变化的；也有的象工作机床的控制那样，其目标值是按照預定的程序变化的。后一种控制也叫作程序控制。

以上是从两个方面把控制作了分类。現在再从理論方面稍加探討。如以前所說明，控制系統可以认为是一种信号傳送系統。因此，它的理論可以根据信号傳送理論的观点一般地加以闡明。信号傳送理論在电信工程学中是重要的理論。以后将知道，自动控制理論的发展在很大程度上依賴于电信工程学。

在信号傳送系統的理論中，按照系統是綫性的或非綫性的，其处理方法有很大的不同。为了处理上的簡单，最好只采用綫性系統，但是实际上非綫性系統也在相当广泛地采用。如以前所說明，閉路控制的特点是，系統中元件的輸入量和輸出量的函数形式的差别对于整个系統的特性并不发生重大的影响，因此，即使是非綫

性系統，綫性理論經过适当的修改之后，也仍然能够近似地应用。

在綫性系統的情况下，由于叠加定理可以成立，因而信号总可以当作是由各种不同頻率的正弦波所合成的，并且系統的特性可以用正弦波的傳送特性来規定，这样一来，处理方法就可以大大簡化。这就是在网絡理論中所說的**頻率特性**。它的性质，当研究了把它推广了为复变函数的**傳递函数**之后，就可以更清楚地理解。

§2 自动控制系統的构成

图 2.1 表示自动控制系統的基本結构。其中受控对象是指系統的完成預定工作的部分。影响它的动作的量，就是要利用控制系統加以調节的量，也就是系統的受控量。受控量由檢測裝置变換成适当的形式，在比較点处和同样变換的目标值相比較，就能够把它們之間的差异即偏差求出。控制装置是一种放大器，它按照偏差的性质和大小来增加或减少提供到受控对象中去的操作量的功率。本图所表示的情形是外部扰动加在受控对象上的；也有外部扰动加在其他部分上的。

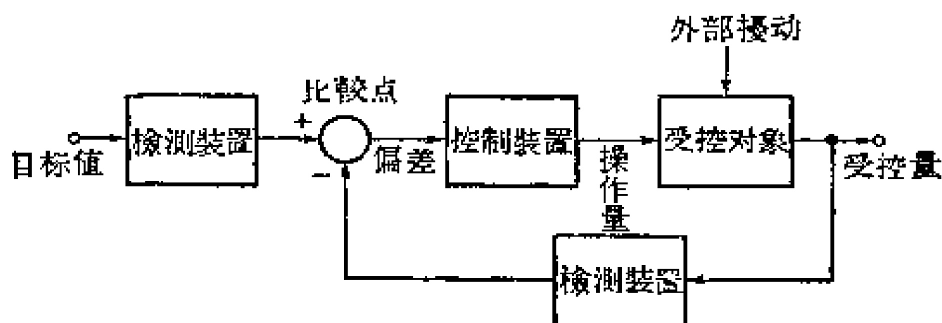


图 2.1

图 2.2 是一种稍微簡单的情形。它是直接从目标值和受控量求出偏差。即使是如图 2.1 所表示的情形，由于檢測裝置通常可以实行比較准确的变换，因而如果把被变换的量作为目标值和受控量，并且使受控量的檢測裝置包含在受控对象之內，那么就也可

以表現为如图 2.2 那样的形式。因此，通常多把图 2.2 的形式作为标准型来討論。此外，在这个图中，外部扰动是通过一个变换装置而加到受控量上；如果外部扰动是加到控制装置和受控对象的中間，也仍然能够等价地写成这种形式。

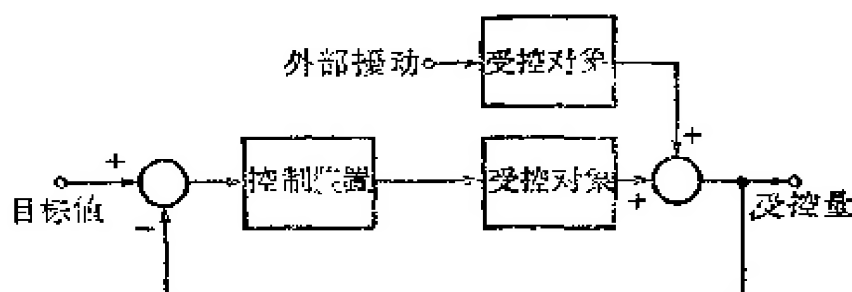


图 2.2

图 2.3 表示一种为使某一个物体，例如船舵，对准某一个指定的方向的自动控制系統。由电动机和齿輪、目标所組成的部分，是受控对象；回轉角是受控量；电位計是檢測裝置。

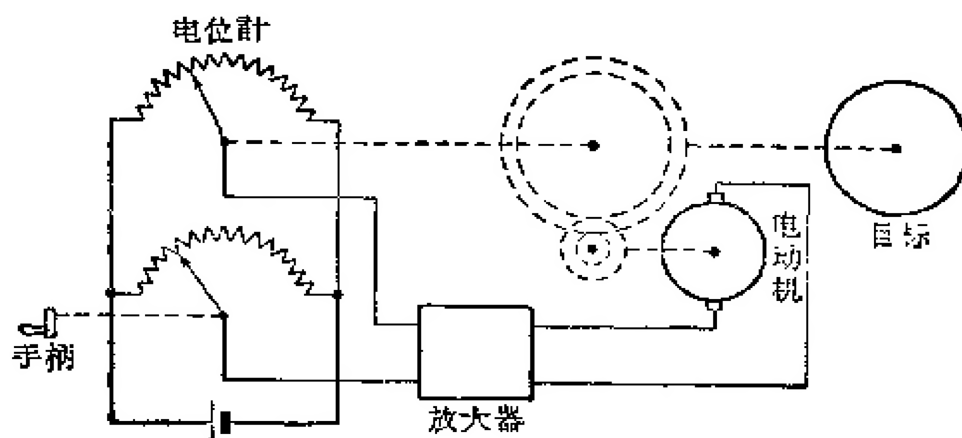


图 2.3

第2章 綫性系統特性

§3 傳遞函数[1]

物理系統的状态可以通过其中各部分的力、压力、位移、速度、流量、电压、电流、电場强度、磁場强度、溫度、熱量、濃度等諸如此类的物理变量表示出来。但是，沒有必要經常地把所有这些变量都加以考虑，而只要考虑直接影响到所研究現象的那些变量所表示的状态，也就是从某一个特殊方面所观察到的状态，也就够了。例如在电网絡中，除特别的場合之外，就沒有必要考虑溫度、压力等变量。又如在电子管放大器中，灯絲电流等通常就不必考虑。以下叫作状态的，就是指这样的状态而言[2]。

当系統中的若干个变量确定之后，系統的状态就可以完全加以規定。这就是說，如果这些变量在某一瞬間的值确定，那么以后的状态就可以根据从外部所加进来的信号完全决定。这样的变量的最小数目，叫作系統的次数[3]。次数实质上就是为确定系統的状态所必需的初始条件的数目。系統的次数不大于构成系統的各个元素的次数之和。由有限个元素組成的集中参数系統，其次数是有限的；分布参数系統具有无限的次数。

如果不加輸入信号，使系統状态保持不变的初始条件一般是存在的。我們以后将取这时的变量的值为 0，而把离开这个值的偏差作为变量。在某些場合下，这样的状态也可能不是完全确定

---

[1] 参照本丛书《网絡理論》§4。

[2] 这里是指决定客体状态的主要参数而言，即关于在复杂的物理現象中找出决定状态的主要因素。——校者注

[3] 这里所謂"次数"，通常多称之为系統的維数。——校者注

的。这种系統叫作**无定位**系統。例如电流被切断的电动机，它可能停止在任意的回轉面。这时，只要选定适当的值作为基准值就可以了。

有限次数系統的状态，一般可以用微分方程来描繪。現在研究以一个輸入变量 x 和 n 个变量 y_1、y_2、…、y_n 所规定的系統。如果在某一瞬間这些值被确定，那么以后的 y_1、y_2、…、y_n 的值可以根据 x 的变化方式决定。因此，可以得到下列方程組：

$$\frac{dy_\nu}{dt}=f_\nu\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ \cdots,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\right) \qquad (3.1)$$

$$(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

如果系統是綫性的❶，則它变成下列的綫性方程組：

$$\left.\begin{aligned}\left(a_{11}+\frac{d}{dt}\right)y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=\sum b_{1\mu}\left(\frac{d}{dt}\right)^\mu x,\\ a_{21}y_1+\left(a_{22}+\frac{d}{dt}\right)y_2+\cdots+a_{2n}y_n=\sum b_{2\mu}\left(\frac{d}{dt}\right)^\mu x,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

描繪系統动态的方程，除此以外，还可以写成种种形式。通常不一定只用次数的变量。电网絡的綫路方程和节点方程就是这种例子。

为了簡单起見，这里假定

$$x=y_1=y_2=\cdots=y_n=0 \quad (t<0). \qquad (3.3)$$

要想求出带有这个初始条件的綫性方程的解，可以利用 Laplace 变换。令

$$\left.\begin{aligned}X(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}x(t)\,e^{-\lambda t}\,dt,\\ Y_\nu(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}y_\nu(t)\,e^{-\lambda t}\,dt,\end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

利用 Laplace 变换

❶ 自然，作者这里是指常系数綫性方程組而言。——校者注

$$\int_{-0}^{\infty} \frac{d^{\mu}x(t)}{dt^{\mu}} e^{-\lambda t} dt = \lambda^{\mu} X(\lambda), \tag{3.5}$$

(3.2) 可以变换成下列代数方程組：

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}+\lambda) Y_1 + a_{12} Y_2 + \cdots + a_{1n} Y_n = \sum b_{1\mu} \lambda^{\mu} X, \\ &a_{21} Y_1 + (a_{22}+\lambda) Y_2 + \cdots + a_{2n} Y_n = \sum b_{2\mu} \lambda^{\mu} X, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

它們的解可以写成下列形式：

$$Y_{\nu}(\lambda) = K_{\nu}(\lambda) X(\lambda) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.7}$$

这里的 $K_{\nu}(\lambda)$ 是 λ 的实系数有理函数，它就是在网絡理論中所讲的傳递函数。以下取 $Y_{\nu}(\lambda)$ 中的一个作为輸出量来研究，附加以符号 ν 表示之。当根据这样所求出来的 $Y(\lambda)$ 求 $y(t)$ 时，可以应用 Laplace 反变换，即

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda. \tag{3.8}$$

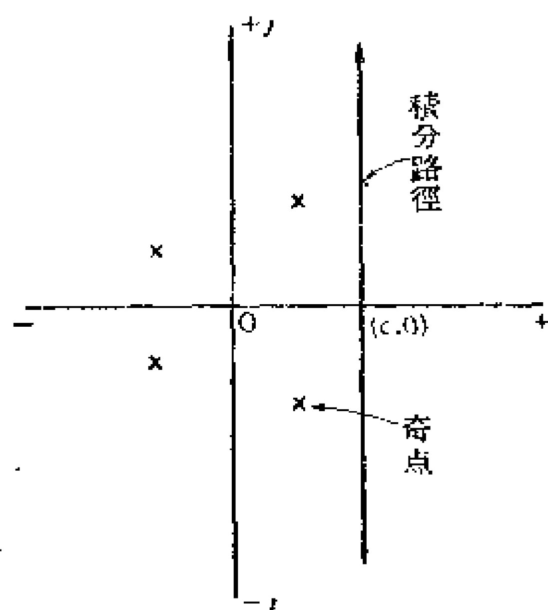


图　3.1

上式的积分路徑如图3.1所表示，是一条通过实軸上的点 $(c, 0)$ 而平行于虛軸的直綫。在选擇 c 的值时，应該使 $Y(\lambda)$ 的全部奇点位在积分路徑的左側。

当輸入信号等于单位脉冲时，也就是

$$x(t) = \delta(t),$$

而且

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (\varepsilon > 0),$$

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

时，由于 $X(\lambda) = 1$，因而系統对它的响应，也就是脉冲响应，可写作

$$k(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}K(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda. \tag{3.9}$$

反之，有

$$K(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}k(t)e^{-\lambda t}dt. \tag{3.10}$$

应用这个公式，即使是分布参数系統，它的运动不能用(3.2)那样的微分方程表示的情形，如果知道它的脉冲响应，傳递函数仍然能够求出❶。例如在理想的滞后回路中，由于

$$k(t)=\delta(t-t_0),$$

因而

$$K(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda t_0}. \tag{3.11}$$

应用脉冲响应，对应于任意輸入量$x(t)$的輸出量，可以用下式表示：

$$y(t)=\int_{-0}^{t}k(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{3.12}$$

这正象在网絡理論中所有的情况一样。

其次，对于

$$x(t)=0 \quad (t<0), \quad x(t)=1 \quad (t>0)$$

的所謂阶跃函数，由于

$$X(\lambda)=1/\lambda,$$

其响应(或称过渡过程)是

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{K(\lambda)}{\lambda}e^{\lambda t}d\lambda. \tag{3.13}$$

这叫作指数响应。因为它代表在輸入突然变化的情况下的过渡过程，所以常常用来表示自动控制系統的动作性能。

当 $Y(\lambda)$ 和 $K(\lambda)$ 是有理函数时，如果把它們展开为部分分式，并且应用公式

---

❶ 同上，作者这里是指常系数綫性方程組而言。——校者注

$$\frac{1}{2\pi j}\int\frac{1}{(\lambda+a)^r}e^{\lambda t}d\lambda=\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-at}, \tag{3.14}$$

就能够很容易地实行Laplace反变换。由此可知,如果以λ_μ ($\mu=1, 2, \cdots, n$)代表$K(\lambda)$的极点,则$k(t)$、$h(t)$等可以用$t^r\exp(\lambda_\mu t)$这样形式的函数的和表示出来。但是,在$K(\lambda)$的极点,即使$X(\lambda)$等于0,也存在着不等于0的$Y(\lambda)$。这也就是説,$t^r\exp(\lambda_\mu t)$的振动,即使沒有輸入,也在系統中存在,它叫作固有振动。要想把系統的固有振动全部求出,可以回过来考察(3.6)式。应該令公式的右边等于0来求解。以$\Delta(\lambda)$表示左边系数构成的行列式,解代数方程

$$\Delta(\lambda)=0,$$

就可以求出各个根λ_μ。在傳递函数的形式中,需要注意有时分子、分母的公共因子被約去,因而λ_μ可能消失。以下将假定只用傳递函数就能够把全部的固有振动求出。

当傳递函数的极点λ_μ的实数部分是負的时候,振动将随着时間的增加而衰减;在正的情形下,振动就将无限地发散。在多重极点时,即使实数部分等于0,也有同样的情况。这种情况叫作**不稳定**[1]。虽然説它是不稳定的,但是并不是説要产生象由于接点接触不良等原因所引起的、同輸入量无关的那样随机的輸出。这就是説,因果关系仍然是經常成立的,相同輸入总是引起相同的輸出。因此,有人认为叫作非稳定更为合适。实际上可能由于杂音等微小的随机的輸入而引起振动,看起来好象是在产生随机的輸出。当初始条件确定,并且仅仅在短时間內使用时,即使是不稳定的系統,也完全可以应用。此外,如果作为系統的整体是稳定的,即使部分系統中存在有不稳定的情况,也沒有什么妨碍。

---

[1] 作者的意思是說此时線性系統的任何一个运动都是不稳定的。請参看校后記中文献[2, 3]。——校者注

其次，当 λ_μ 的实数部分等于 0，而极点的位数等于 1 时，振动虽然不会独立地发展起来，但是不論由于何种原因，振动一經出現，就将无限地继續下去，而且如果在輸入方面加上和輸入頻率相同的、振幅有限的波动信号，振动仍然会无限制地发散。因此，这种情形通常也列入不稳定的范圍。

由此可知，一个系統成为稳定的条件，是傳遞函数在包含虛軸在內的右半面即右閉半平面內是正則的。

稳定性的定义，如在网絡理論中所說明的，其基本的要点是："对于一个正数 M_1，如果[1]

$$|x(t)|<M_1 \quad (t<t_0),$$

則有一个

$$|y(t)|<M_2 \quad (t<t_0)$$

的数 M_2 存在。" 当傳遞函数是有理函数时，不难理解，为了得到在这种意义規定下的稳定性，必要而充分的条件就是在右閉半平面內是正則的。当傳遞函数不是有理函数时，关系虽然不是那样簡单，但是也容易理解那是充分的条件。为什么呢？因为傳遞函数在虛軸上是正則的，也就意味着 Laplace 变换

$$\int_{-0}^{\infty} k(t)\,e^{-\lambda t}\,dt$$

在虛軸的稍左方的点也是收斂的。这意味着在虛軸上絕对收斂，即

$$\int_{-0}^{\infty} |k(t)|\,dt<\infty.$$

在网絡理論中已經說明，这个条件和根据上述定义的稳定性是等价的。

傳遞函数在 Laplace 变换不收斂的区域內不一定是 1 价的。但是在有理函数的場合下，即在奇点只是极点的場合下，它是 1 价的。当不是有理函数时，如果右半平面內的奇点不只是极点，則它

[1] t_0 为任意大数。請参看校后記中文献[3, 13]。——校者注

在右半平面内也是1价的。以下只考虑这种情形。这时，只要知道傳递函数在虛軸上的值，根据解析的延拓，它在右半平面内的值就全部可以确定。如在下一节将要說明的，虛軸上的值 $K(j\omega)$，可以給出对应于正弦波的响应特性，这叫做頻率特性。以后将闡明，在判断稳定性时，它具有重要的作用。

頻率特性，用它的对数表示有許多方便。为此，可以写成

$$\alpha+j\beta=\log A(j\omega),$$

α 叫作振幅特性(增益特性)，β 叫作相位特性。各量的单位，α 用奈貝，β 用弧度。在实用上，大多代替 α 而采用

$$\alpha'=20\log_{10}|A(j\omega)|,$$

它的单位叫作 db (分貝)。例如輸入与輸出之比为 2 时大約是 6 db；为 10 时大約是 20 db。另一方面，β 通常多用度表示。

傳递函数和頻率特性在綫性系統的处理中占有重要地位。其原因很多，例如在計算响应时不需要对于微分方程一一求解，就能够写出 Laplace 反变换；又如它的計算在大多数情形下都可以利用公式进行；又如把信号作为各种頻率的正弦波的合成，可以很清楚地知道其各个成分是怎样被傳送的；等等。此外，还有一个重要的原因是，如在网絡理論中所說明的，系統的傳递函数能够根据系統各个部分的傳递函数用代数的計算方法求出。特别是象控制系統那样的包含放大作用的情形，系統的元素大多是单向的，卽信号只能够向一个方向傳递，在这种情形下，系統的傳递函数可以簡单地用各部分的傳递函数的积表示出来。因此，增益特性、相位特性就可以用和的形式表示出来。

§4 信号及其傳送

以上只考察了当 $t<0$ 时信号等于 0 的情形。这只是为了方便。一般說来，并不需要作这样的限制。但是当把时間区域延长

到无限的过去时，作为初始条件，必須是系統在无限的过去是处在絕对静止的状态，或者至少是处在其影响現在已經完全消失的状态。按照这种假定，对应于輸入量 $x(t)$ 的輸出量，只要积分是收斂的，当然可以用公式

$$y(t)=\int_{-0}^{\infty}k(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{4.1}$$

表示出来[1]。然而如果使

$$x(t)=e^{\lambda t}, \tag{4.2}$$

則可以得到

$$y(t)=\int_{-0}^{\infty}k(\tau)e^{\lambda(t-\tau)}d\tau=K(\lambda)e^{\lambda t}.$$

但是 λ 必須是在积分

$$\int_{-0}^{\infty}k(t)e^{-\lambda t}dt \quad (=K(\lambda)) \tag{4.3}$$

收斂的区域之內。这样，可以知道傳递函数 $K(\lambda)$ 在其收斂区域內就代表当加上輸入 $\exp(\lambda t)$ 时的輸出量和輸入量之比。因此，以对应于这个区域內的 λ 的信号 $\exp(\lambda t)$ 的迭合作成的信号，其相应的輸出也可以用这些信号的迭合的形式表示出来。这时，如果用这个区域內的积分路徑 c 写出

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{c}X(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda, \tag{4.4}$$

則对应于它的輸出就可以写成

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{c}K(\lambda)X(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda. \tag{4.5}$$

反过来，当某一个 $x(t)$ 給定时，怎样才能够写出公式(4.4)的形式呢？为此，首先从

$$X(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\lambda t}dt \tag{4.6}$$

---

[1] 实际的信号自然是实函数，但是为了方便起見，可以考慮公式中包含复变函数，其实数部分代表实际的信号(参照本丛书《网絡理論》§4)。

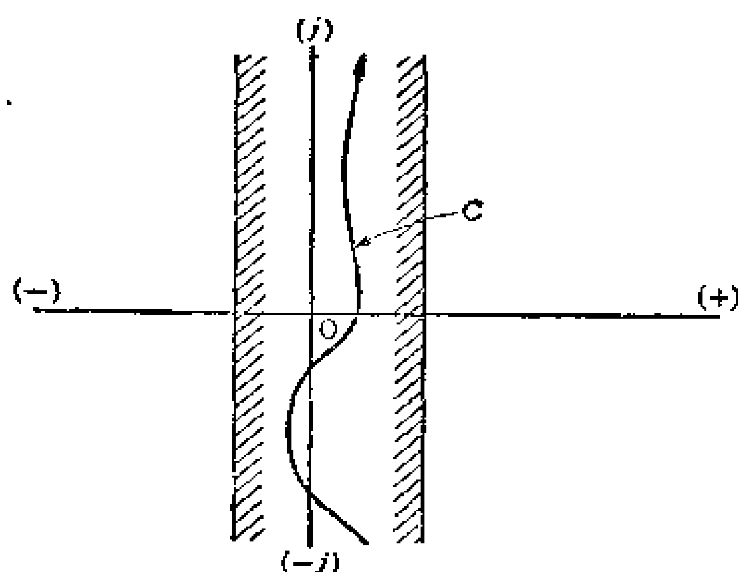


图 4.1

求出 $X(\lambda)$。但是由于这不是 Laplace 变换，因而它的收斂区域不一定是半平面，通常大抵是象图 4.1 所表示的那样带状的区域。在这种情形下，如果取通过这个区域、从 $-j\infty$ 向 $j\infty$ 前进的积分路徑，则一般地

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{c} X(\lambda)\,e^{\lambda t}\,d\lambda$$

可以成立。因此，公式(4.3)和公式(4.4)如果具有共同的收斂区域，则在那个共同区域中选擇积分路徑，就能够进行公式(4.5)的計算。如果沒有共同的区域，那就不可能，即使把 $X(\lambda)$ 在公式(4.3)的收斂区域內解析地延拓，也得不到正确的結果。例如在

$$x(t)=e^{-|t|}$$

的情形下，虽然可以得到

$$X(\lambda)=\frac{2}{1-\lambda^{2}},$$

但是这个收斂区域是 $-1<\mathrm{Re}\lambda<1$，在这个区域的外部的积分路徑上，例如将成为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{2-j\infty}^{2+j\infty}\frac{2}{1-\lambda^{2}}\,e^{\lambda t}\,d\lambda=\begin{cases}e^{-t}+e^{t} & (t>0),\\ 0 & (t<0),\end{cases}$$

这变成了所考察的輸入不同于原来的 $x(t)$。

以上虽然是用一般的形式来說明，但是如果系統限于是稳定的，则在大多数情形下，其收斂区域是包含虛軸在內的右半平面，

而信号在无限的过去和未来都等于0，因此，虚軸最适合于采用为积分路徑。这种情形下的变换式成为

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{4.7}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{4.8}$$

这剛好是所謂 Fourier 变换及其反变换。这种变换当然不是可以无条件地成立的。关于这些条件，虽然还需要仔細地进行研究，但是这已經属于其他书籍的范圍[1]，所以这里暂时只好假定这种关系是成立的。

为了方便起見，这里再附加条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt<\infty, \tag{4.9}$$

这也就是 $x(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ 的条件。它在物理意义上表示信号的总能量是有限的，有了这个条件，就可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega. \tag{4.10}$$

这意味着信号的能量对应于各个頻率成分而分配

$$\frac{1}{2\pi}|X(j\omega)|^2d\omega=|X(j2\pi f)|^2df[2].$$

由于这样的理由，$|X(j\omega)|^2$ 有时叫做能量譜。

另一方面，由于假定系統是稳定的，因而其脉冲响应滿足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty,$$

其傳递函数在虚軸上是絕对收斂的，并且是有界的。因此，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|K(j\omega)|^2\cdot|X(j\omega)|^2d\omega$$

也是有界的。这就是說，輸出的能是有限的，其能量譜等于

---

[1] 参照本丛书《富里哀变换及拉普拉斯变换》。

[2] f 是实际的頻率，$\omega=2\pi f$ 叫做角頻率。

$$|K(j\omega)|^2 \, |X(j\omega)|^2.$$

在研究能量譜时，經常在証明中出現的是相关函数。它可以定义如下：

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)\overline{x(\tau)}\,d\tau. \tag{4.11}$$

属于相关函数的性质有：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(0)&=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt,\\|\varphi(t)|&\leqslant\varphi(0),\\\overline{\varphi(t)}&=\varphi(-t)\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

等等，这些性质不需要加以証明。此外，$\varphi(t)$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 之間是連續的。为什么呢？因为如果取足够大的 c_0，則

$$\left|\varphi(t)-\int_{-c_0}^{c_0}x(t+\tau)\overline{x(\tau)}\,d\tau\right|<\varepsilon.$$

在这样有限范圍的积分中，不論使 t 的变化怎样小，为使其积分值的变化不小，$x(t)$ 的阶梯形状的不連續点必須在某一范圍內稠密地分布，而这是不可能的。

把这个相关函数作 Fourier 变换，則

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)\overline{x(\tau)}e^{-j\omega t}\,d\tau\,dt$$
$$=|X(j\omega)|^2, \tag{4.13}$$

而且反过来变成

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{4.14}$$

以上研究了有限能量的信号，而实际上不能够这样处理的信号相当多。一个較好的例子是杂音，其随机的振动一直延續下去。这样的信号可以作为有限功率的信号处理。所謂有限功率是指

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt<\infty, \tag{4.15}$$

这样的信号,按照原来的形式,不可能直接作 Fourier 变换。对于这样的信号,可以先根据相关函数来进行研究。这种情形的相关函数的定义是

$$\varphi(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t+\tau)\overline{x(\tau)}\,d\tau. \tag{4.16}$$

公式

$$\varphi(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt \tag{4.17}$$

表示平均功率,和以前相同,

$$|\varphi(t)|\leqq\varphi(0),\quad \overline{\varphi(t)}=\varphi(-t) \tag{4.18}$$

仍然成立。但是現在不必一定是連續函数。只要假定在原点的連續性,则在其他范圍内全部都是連續的。所謂在原点是不連續的,就意味着有不属于任何有限頻率的能量的成分存在。在实用上,这样的信号当然应該除外。这也就是說,可以假定 $\varphi(t)$ 是連續的。

另一方面,和以前的能量譜密度相对应,还应該考察功率譜密度。虽然后者也可以从 $\varphi(t)$ 的性质,用数学方法推导出来,但是下面将着重从物理意义方面来进行研究。首先使

$$X_T(j\omega)=\int_{-T}^{T}x(t)e^{-j\omega t}\,dt, \tag{4.19}$$

并且把公式

$$P(j\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(j\omega)|^2 \tag{4.20}$$

作为功率譜密度的定义。我們容易証明:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}P(j\omega)\,d\omega. \tag{4.21}$$

另外还成立下列的关系:

$$\left.\begin{aligned}P(j\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-j\omega t}\,dt,\\ \varphi(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

此外，当信号包含着作周期性变化的成分时，$\varphi(t)$ 也具有周期性的成分，(4.22)的第1式是收斂的。这时，使

$$\lim_{T\to\infty}\left[\int_{-T}^{-1}+\int_{1}^{T}\right]\frac{\varphi(t)e^{-j\omega t}}{-jt}\,dt+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)(1-e^{-j\omega t})}{jt}\,dt=A(\omega)+\text{const},$$

这样就能够写成所謂 Stiltjes 积分的形式：

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\,dA(\omega).$$

§5　頻带受限制的信号

实际的信号，在大多数情形下，或者是其譜带本来就受到限制，或者是由于傳送路徑不能傳送有限頻带以外的頻率，即使把某种頻率以上的成分除去，也并不妨碍信息的傳送。因此，本节将考察頻带受限制的信号的性质。

如果以 $(x)t$ 代表一个不含有 f_0 以上的頻率成分的有限能量的信号，以 $X(j\omega)$ 代表它的 Fourier 变換，則可以得到

$$X(j\omega)=0\quad(|\omega|\geqq\omega_0=2\pi f_0).$$

由于有限区間的函数可以用 Fourier 級数表示出来，因而如果把这个 $X(j\omega)$ 在 $|\omega|<\omega_0$ 的范圍內展开，就可以得到

$$X(j\omega)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}a_\nu e^{-j\nu\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\quad(|\omega|<\omega_0).\tag{5.1}$$

右边是以 $2\omega_0$ 为周期的周期函数，但是只应該取它的 $|\omega|<\omega_0$ 的范圍。

如果反过来由此求 $x(t)$，則可以得到

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\sum a_\nu e^{-j\nu\pi\frac{\omega}{\omega_0}}e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$=\frac{\omega_0}{\pi}\sum a_\nu\frac{\sin(\omega_0t-\nu\pi)}{\omega_0t-\nu\pi}=2f_0\sum a_\nu\frac{\sin\pi(2f_0t-\nu)}{\pi(2f_0t-\nu)}.$$

这里如果使 $t=\mu/2f_0$，則可以得到

$$x(\mu/2f_0)=2f_0a_\mu,$$

因此，可以写成

$$x(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}x\left(\frac{\nu}{2f_0}\right)\frac{\sin\pi(2f_0t-\nu)}{\pi(2f_0t-\nu)}. \tag{5.2}$$

从这个公式可以知道，只用 $t=\nu/2f_0(\nu=\cdots, -1, 0, 1, \cdots)$ 的瞬間，卽相隔 $1/2f_0$ 的瞬間的值，就可以完全决定 $x(t)$. 这就是有名的染谷 -Shannon 采样定理❶。在这个公式中出現的函数

$$\frac{\sin\pi(2f_0t-\nu)}{\pi(2f_0t-\nu)}, \tag{5.3}$$

具有如图 5.1 所表示的那样的形状，这可以想象是从 $t=\nu/2f_0$ 时的单位脉冲中把 f_0 以上的頻率成分除去而得到的。因此，当需要傳送 $x(t)$ 时，可以只把每 $1/2f_0$ 的值作为脉冲发出，然后用截止頻率等于 f_0 的理想濾波器把它平滑，这样就能够得到原来的信号。这就是时分通信制的原理。

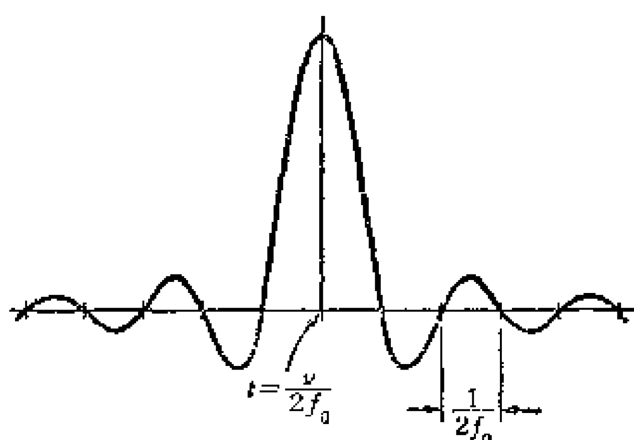


图 5.1

以上虽然是就有限能量的信号进行了研究，但是公式(5.2)也同样适用于有限功率的信号。

自动控制系統中，在許多情形下，例如在利用雷达发出的信号的情形下，或者在把灵敏的檢流計的指針每隔一定时間固定、檢測其位置的情形下，等等，也使用时分間隔的信号。这种系統叫作采样控制系統。

这种采样值的傳送問題，可以用与以前所說明的方法稍微不同的方法处理。現在，为了簡単起見，使

❶ 在很多文献中常称为 Котельников 定理。参看校后記中文献[18]。——校者注

$$x(\nu\Delta)=x_\nu,\quad \Delta=1/2f_0,$$

并且把被采样的信号用

$$x^*(t)=\sum x_\nu\delta(t-\nu\Delta) \tag{5.4}$$

代表，式中的 δ 是脉冲函数。特别是由于这样的理想的脉冲的能量等于无限大，因而实际上可以认为其頻带在大大高于 f_0 的頻率是被限制了的。把上式作 Fourier 变换，可以得到

$$X^*(j\omega)=\sum x_\nu e^{-j\nu\omega\Delta}. \tag{5.5}$$

这剛好是公式(5.1)，只不过是除去了 $|\omega|<\omega_0$ 的限制。这里，令

$$z=e^{j\omega\Delta}, \tag{5.6}$$

把原来就是 z 的函数的 $X^*(j\omega)$ 改用 $X^*(z)$ 代表，则得到

$$X^*(z)=\sum x_\nu z^{-\nu}. \tag{5.7}$$

另一方面，假定傳送系統把脉冲接收进来，又把脉冲发送出去。这就是說，应該假定脉冲响应具有

$$k^*(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}k_\nu\delta(t-\nu\Delta) \tag{5.8}$$

的形式。这样，就能够写成

$$K^*(z)=\sum k_\nu z^\nu, \tag{5.9}$$

其輸出可以如下計算：

$$Y^*(z)=K^*(z)X^*(z). \tag{5.10}$$

如果再把这样所得到的式子展开为 z 的冪級数，其系数就直接給出采样值。

但是，在討論傳送系統的性质时，用傳遞函数的形式来研究比用頻率特性要方便。这就是說，变量不仅限于是 $j\omega$ 那样的純虛数值，而是扩大到复变量。反

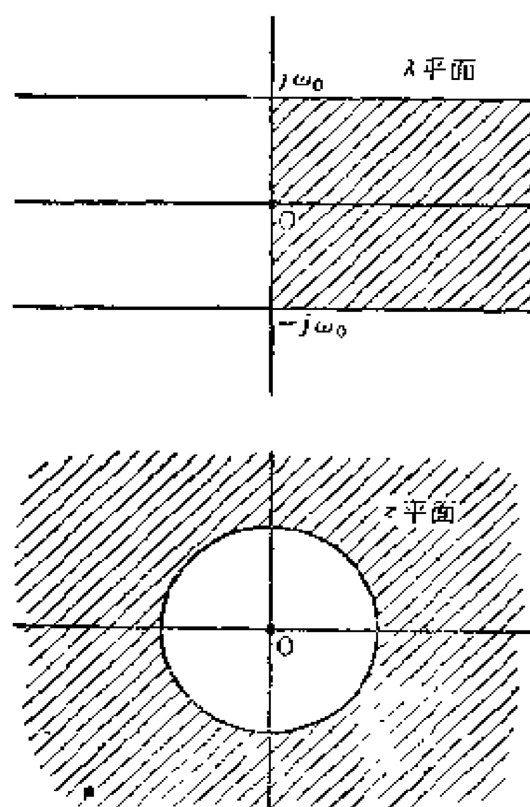


图　5.2

之，如果把 z 写成

$$z = e^{\lambda\Delta} \tag{5.11}$$

的形式来考察，則 λ 和 z 的关系将如图 5.2 所表示的那样，λ 平面上的解于两条通过虚軸上的点 $\pm\omega_0$ 而平行于实軸的直綫之間的部分由 z 的整个平面所映象。而 λ 平面上的虚軸由 z 平面上的单位圓所映象，其右半平面对应于单位圓的外部。把 z 的意义这样扩大之后，$K^*(z)$ 叫作脉冲傳遞函数。作为 $K^*(z)$ 的稳定性的条件，是在单位圓周上以及在其外部都沒有奇点。

作为脉冲傳送系統，有时是如图 5.3 所表示的那样，在連續信号傳送系統的輸入和輸出部分都采用采样的。如果以 $K(\lambda)$ 代表这种系統的傳遞函数，則其脉冲响应是

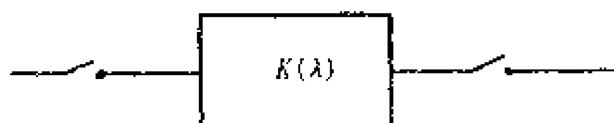


图 5.3

$$k(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda,$$

因而在采样情形下的脉冲傳遞函数是

$$K^*(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k(\nu\Delta) z^{-\nu} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu\lambda\Delta} z^{-\nu}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K(\lambda)}{1-e^{\lambda\Delta}z^{-1}}\, d\lambda. \tag{5.12}$$

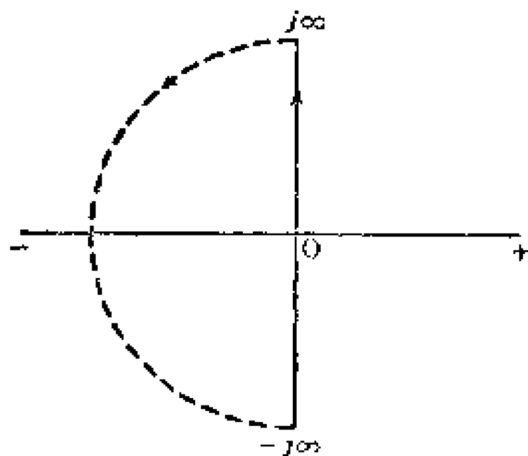


图 5.4

但是 z 必須选擇較大的值，以保証在积分路徑的左側，公式的分母沒有零点。如果系統是稳定的，可以取 $c=0$，并且使 z 位在单位圓之外。如果 $K(\lambda)$ 是有理函数，則可以在积分路徑上加上图 5.4 所表示的那样大的半圓而采用留数的方法处理。但是当 $K(\lambda)$ 在

$\lambda \to \infty$ 时不等于 2 阶以上的 0 时，半圓的积分不等于 0，这需要注意。例如如果使

$$K(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \quad (Re\lambda_1 < 0),$$

则得到

$$K^*(z) = \frac{1}{1 - e^{\lambda_1 \Delta} z^{-1}} - \frac{1}{2}.$$

由于这个半圓的影响而产生的 $-1/2$，实际上是对应于：$k(t)$ 在 $t=0$ 时是不連續的，而且

$$k(-0) = 0, \quad k(+0) = 1, \quad k(0) = 1/2.$$

作为实际的問題，在系統中多少有迟滞存在，因此，也有时使 $k(0) = 0$，而規定

$$K^*(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} k(\nu\Delta) z^{-\nu}.$$

根据这个規定，对于上述的例子可以得到

$$K^*(z) = \frac{z_1}{z - z_1} \quad (z_1 = e^{\lambda_1 \Delta}),$$

这和原来的 $K(\lambda)$ 成为很好的对应。

以上研究了連續信号系統中具有有理傳遞函数的情况。此外，值得我們注意的还有由有限个理想的迟滞元件所組成的系統，这时，$K^*(z)$ 变成 z^{-1} 的有限項的多項式。这样的輸入的影响只是在有限时間內持續的系統，在連續系統中，必須有理想的迟滞元件；而如果是采样系統，由于时間被量子化，因而就能够用带有存儲装置和开关作用的装置作成。这样的例子是应用数字計算机的系統，它把过去的采样值記忆下来，进行

$$y_t = \sum_{0}^{n} k_\nu x_{t-\nu}$$

的演算。在这种情形下，当然 y, k, x 的值也要被量子化来进行处理。这样，把时間和物理量加以量子化来处理，防止傳送、变换过

程中所发生的失真，利用电子計算机进行高級的演算，这是最近的重要发展趋向之一。

最后，将被采样的脉冲列轉变为連續信号时，如果使用低通滤波器，虽然并无不可，然而在实用上多采用 RC 电路，并且采用所謂保持措施来使各个脉冲的振幅保持到下一个脉冲的方法，如图 5.5 所表示的那样。

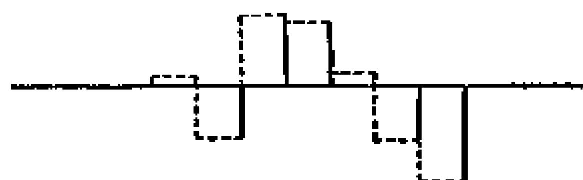


图 5.5

§6 Bode 曲綫❶

取 ω (或 f) 的对数作为横坐标，取以分貝表示的增益和以度(或弧度)表示的相位作为纵坐标，这样画出来的曲綫便于表示傳送系統的特性，在自动控制系統的設計中也很适用。通常把这种图叫作 **Bode 曲綫**。

在实际繪制 Bode 曲綫时，方便的是：頻率特性 (因而其傳遞函数)的积可以用增益和相位的和表示出来。利用这一特点，不論傳遞函数写成几个因式的积，都可以先就各个因式作出曲綫，然后把它們在图上迭加起来，而簡单地画出整个系統的曲綫。

特别当傳遞函数是有理函数时，由于其分母分子可以分解成一次或二次的因式的积，因而只要求作出对应于这些一次式及二次式的 Bode 曲綫，就能够簡单地作出对应于任意有理函数的曲綫。自动控制系統的傳遞函数只在負的实軸上有零点或极点的情形較多，这时，由于只有一次的因式，問題就变得非常簡单。

首先考察一下

$$G(\lambda)=\frac{1}{1+T\lambda} \tag{6.1}$$

的情形。其所以要取一次因式的倒数来考察，是因为在实际的情

❶ 在我国自动調节的文献中常称之为对数頻率特性。参看[14]。——校者注

形中仅仅为一次的傳递函数經常具有这样的形式。这里，T 叫作时間常数。如果为了方便起見，使

$$\omega_0=1/T,$$

則得到

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\log|G(j\omega)|=-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right),\\ \beta&=-\tan^{-1}(\omega/\omega_0).\end{aligned}\right\}\qquad(6.2)$$

这里，

如果 $\omega\ll\omega_0$，則 $\alpha\approx0$，$\beta\approx0$；

如果 $\omega\gg\omega_0$，則 $\alpha\approx-\log(\omega/\omega_0)$，$\beta\approx-90°$。

因此，当 ω 小于 ω_0，增益漸近于 0db，相位漸近于 0° 的直綫；当 ω 大于 ω_0，則增益漸近于頻率每增加一倍、即每一个倍频程約下降 6db 的直綫，而相位漸近于 $-90°$。在 $\omega=\omega_0$ 的地方，增益的两条漸近綫相交，实际的增益特性，如图 6.1 所表示的那样，在这里稍稍弯曲成为弧形。由此可知，增益特性可以在 $\omega=\omega_0$ 的地方用曲折的折綫近似地表示。由于这样的原因，ω_0 有时叫做折点頻率。这个折綫和实际的增益特性两者之間的差别，在 ω_0 处最大，約等于 3db。

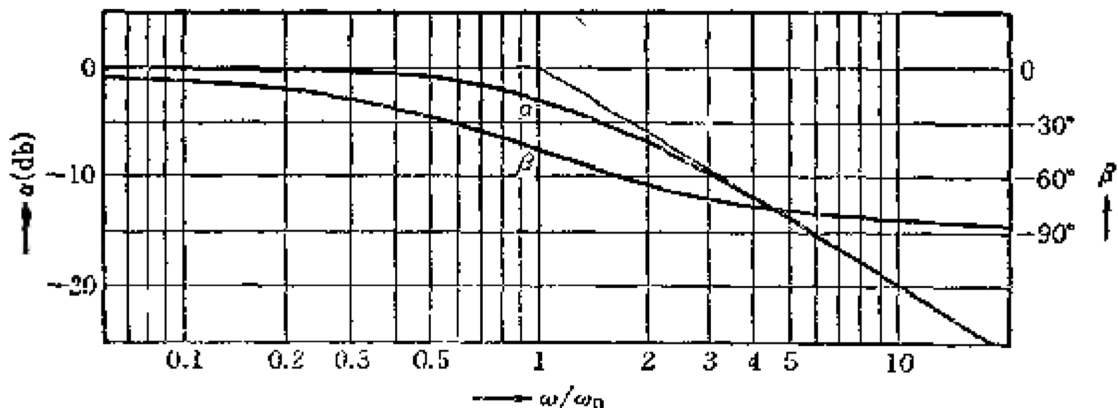


图 6.1

由于 Bode 曲綫的横軸表示 ω 的对数，因而只要把 $\omega_0=1$ 的曲綫适当地向左右推移，就可以得到对应于各种不同的 ω_0 的曲綫。

所以，因式为一次的 Bode 曲綫，只要作出一个就够了。

现在以函数

$$G(\lambda)=\frac{1+\lambda}{\lambda(1+\lambda/5)(1+\lambda/50)^2}$$

作为一个例子来考察。由于各个因式的折点頻率各等于1、5、50，因而首先可以得到如图 6.2 的折綫所表示的那样的近似漸近特性。实际的特性是把这条折綫用曲綫代替而得到的实綫的形状。为了正确地求得它，只要把图 6.1 的特性推移迭加即可。这样一来，近似漸近綫可以使于我們很簡单地知道大体的形状。另一方面，对于相位来說，近似漸近綫如虛綫所表示，实际特性如实綫所表示。这样，一般地說来，单单从漸近綫并不能够很好地得到相位的近似，但是如果把一定的漸近綫的区間延长，則在区間內也可以得到相当良好的近似。

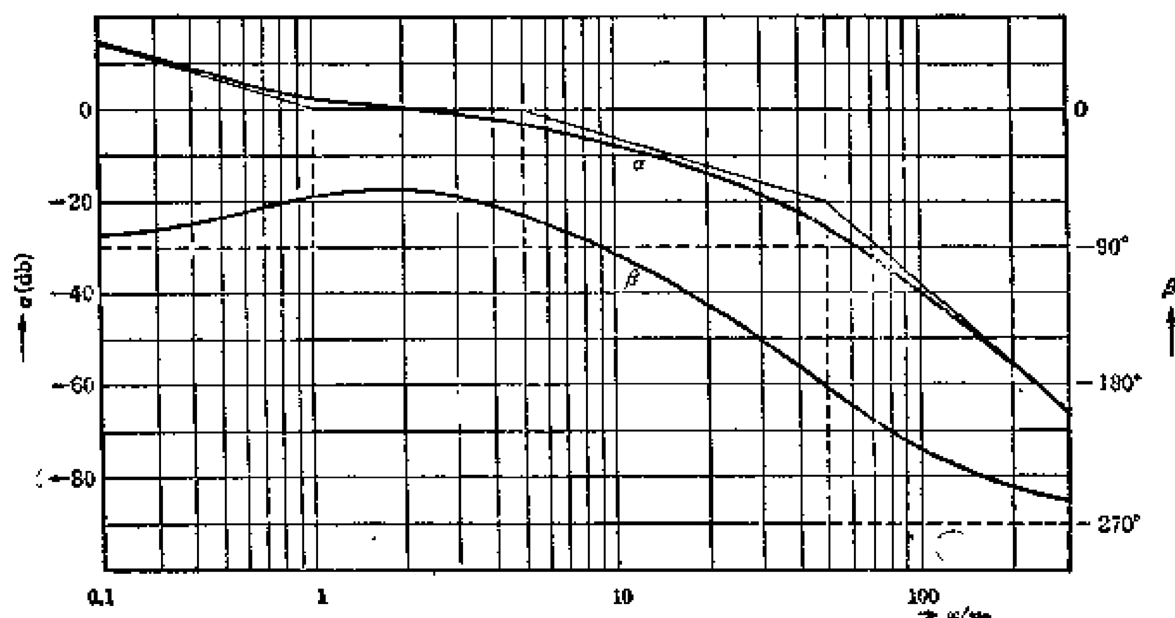


图 6.2

其次，如果函数是二次的，它一般地可以写成下列的形式：

$$G(\lambda)=\frac{\omega_0^2}{\lambda^2+2\zeta\omega_0\lambda+\omega_0^2}\quad(\zeta<1),\qquad(6.3)$$

由此可以得到

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=-\frac{1}{2}\log\left\{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right\},\\ \beta&=-\tan^{-1}\left\{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\Big/\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right\}.\end{aligned}\right\}\qquad(6.4)$$

其 Bode 曲綫成为图 6.3 所表示的那样的形状。在这种情形下，不言自明，考察漸近綫同样比較方便。

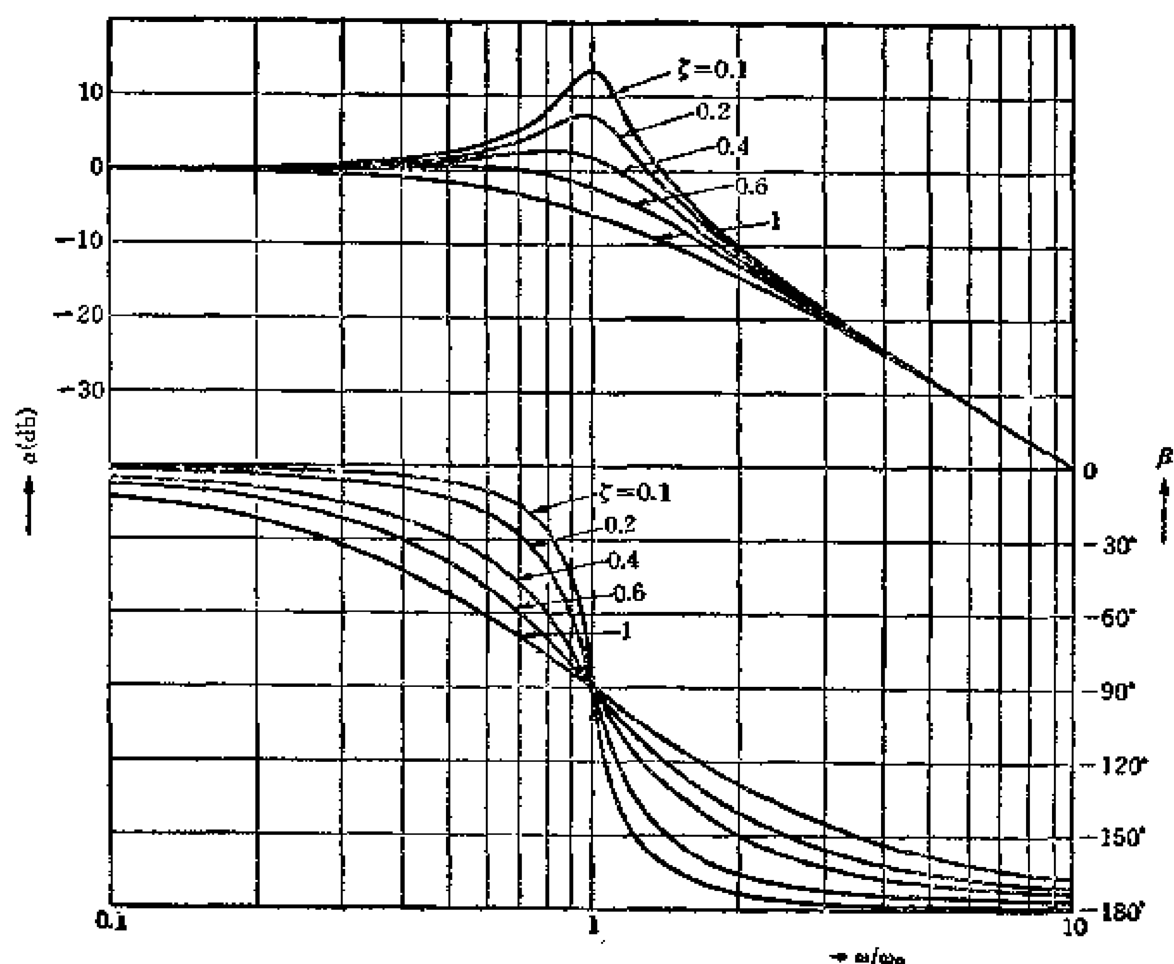


图 6.3

此外，也时常会遇到不是有理函数，而表示一定时間的迟滞的函数

$$G(\lambda)=e^{-\lambda/\omega_0},\qquad(6.5)$$

其Bode曲綫如图6.4所表示。

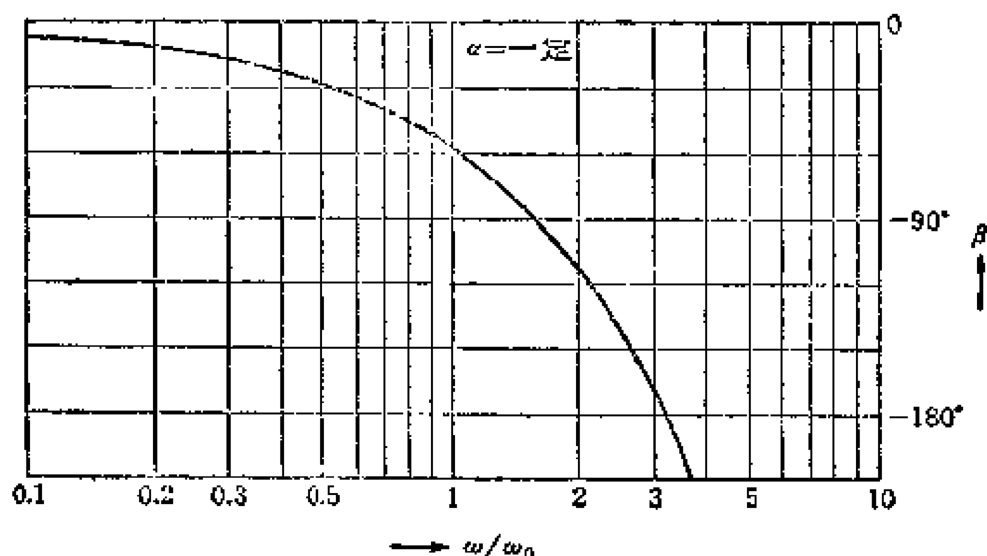


图 6.4

从图6.2的例子上可以看出，增益特性的漸近綫保持着每一个倍频程下降6$n$db那样的斜率的区間，其相位的漸近綫等于$-90°\times n$。增益和相位之間存在着这样的密切的关系，是由于这样的傳递函数是最小相位推移型；如果不是最小相位推移型，例如图6.4所表示的那样的情形，则这种关系并不成立[1]。

在最小相位推移型的情形下，由于其傳递函数的对数在右半平面内是正則的，因而如果象在网絡理論中所說明的那样，把它的增益特性加以規定，則相位特性就能够完全确定出来。这种关系可以用例如下式表示：

$$\beta_{\omega=\omega_0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha}{du}\ \log\coth\frac{|u|}{2}\,du, \qquad (6.6)$$

$$u=\log(\omega/\omega_0).$$

这里由于

$$\log\coth\frac{|u|}{2}=\log\left|\frac{\omega+\omega_0}{\omega-\omega_0}\right| \qquad (6.7)$$

---

[1] 參看校后記中參考文献[15]。——校者注

的形状是象图 6.5 所表示的那样，因而 β 可以根据該点附近的 α 的斜率大致地确定出来。但是，当給出增益特性而求相位特性时，为了实际处理 (6.6) 的积分，还需要花費相当的手續。Bode 曾經对于对应于如图 6.6 所表示的那样的半无限区間傾斜特性的相位特性进行計算，借助于此，并且根据任意的增益特性都可以用折綫近似地表示的事实，提出了把半无限区間傾斜特性加以合成而求出相位的方法。后来 Thomas 以这种方法为依据，編制出十分詳細的計算表❶。

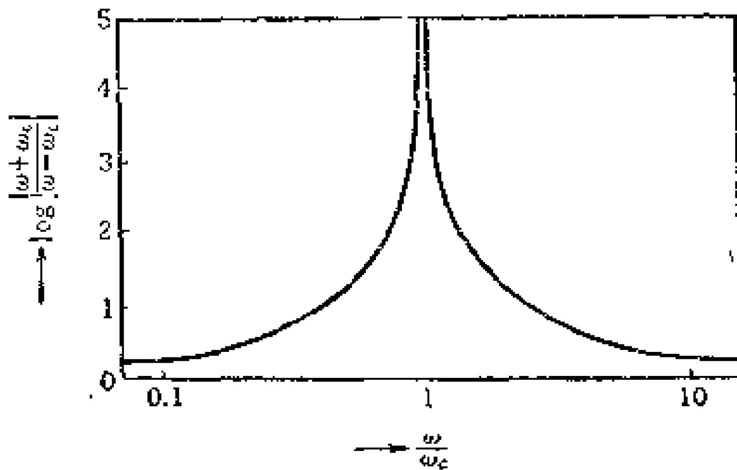


图 6.5

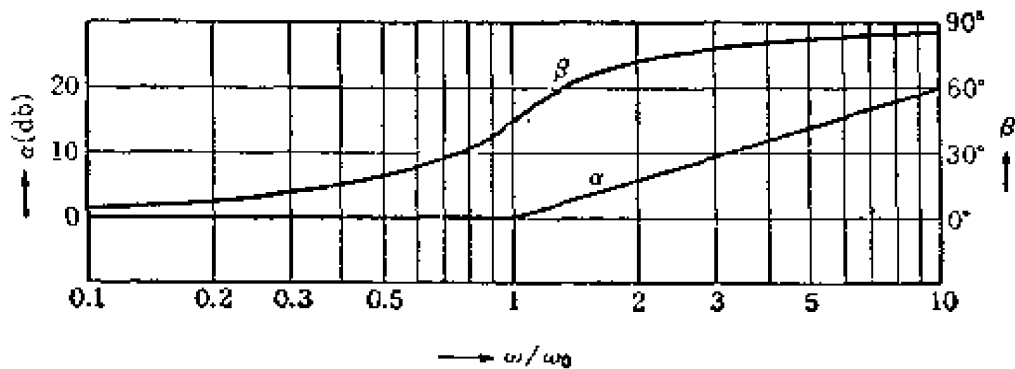


图 6.6

从 α 求 β 的步驟，实质上就是从函数 $\gamma=\alpha+j\beta$ 的实数部分求出虚数部分。为此，如果考虑以 λ_γ 或 γ/λ 代替 γ，則在虚軸上成为：

$$j\omega\gamma=-\omega\beta+j\omega\alpha,\quad -j\gamma/\omega=\beta/\omega-j\alpha/\omega.$$

由于实数部分和虚数部分相互交换，因而就能够从 β 求出 α。其

❶ Thomas: Bstj 26 (1947 年 10 月), 870; Monograph 2550.

計算公式可以写为：

$$\alpha_c-\alpha_\infty=-\frac{1}{\pi\omega_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(\omega\beta)}{du}\log\coth\frac{|u|}{2}du, \qquad (6.8)$$

$$\alpha_c-\alpha_0=-\frac{\omega_c}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(\beta/\omega)}{du}\log\coth\frac{|u|}{2}du. \qquad (6.9)$$

此外，如果应用函数 $\gamma/\sqrt{1-\omega^2/\omega_0^2}$，当小于 ω_0 时給出 α，当大于 ω_0 时給出 β，就能够求出小于 ω_0 时的 β 和大于 ω_0 时的 α。应用这点而得到的最重要的特性是，当小于 ω_0 时α是一定的，当大于 ω_0 时 β 是一定的，其相对应的傳递函数变成下列的形式：

$$G(\lambda)=\frac{1}{\{\sqrt{1+\lambda^2/\omega_0^2}+\lambda/\omega_0\}^n}, \qquad (6.10)$$

当 $\omega<\omega_0$ 时，$\alpha=0$，$\beta=-n\sin^{-1}(\omega/\omega_0)$；

当 $\omega>\omega_0$ 时，$\alpha=-n\log(\sqrt{\omega^2/\omega_0^2-1}+\omega/\omega_0)$，

$$\beta=-n\times 90^\circ.$$

α 漸近于每一个倍頻程下降 $-6n$db 的直綫。图 6.7 是 $n=1$ 的情形的曲綫。

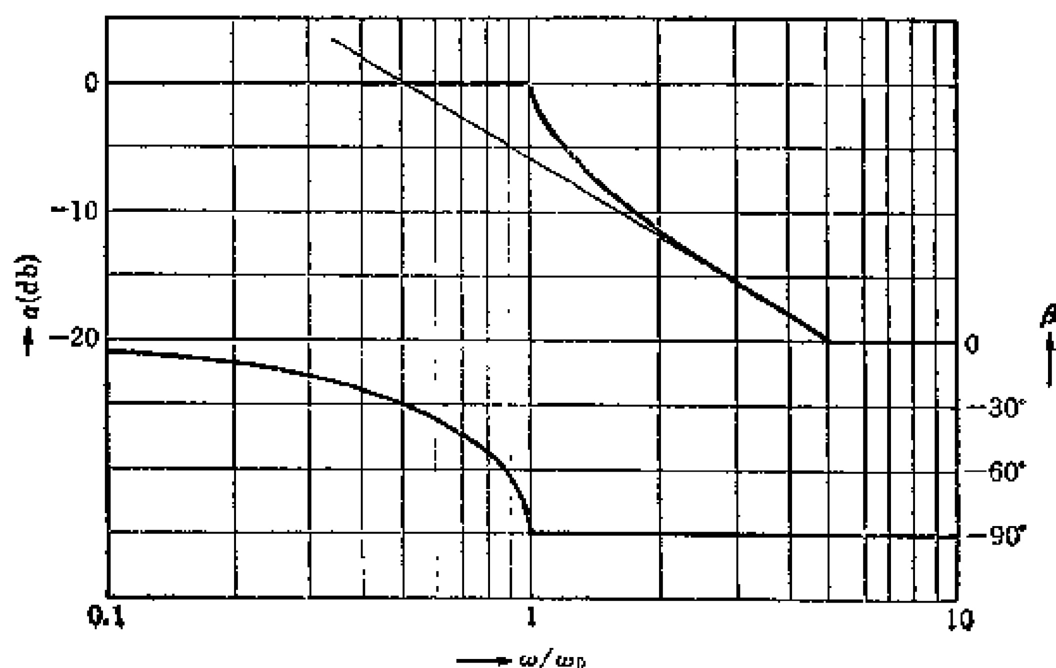


图 6.7

(6.10) 那样的无理函数，在由有限个元件組成的集中参数系統中是不可能实现的，但是利用定 K 型低通滤波器的影象阻抗等于

$$Z_{OT}=R\sqrt{1+\lambda^2/\omega_0^2}$$

的条件，能够作成 LC 的无限电路。

§7 元件及其特性

自动控制系統应用的領域很广，可以采用的元件也多种多样。这里只限于簡单地說明若干种普通常常采用的元件。

元件的分类方法也有很多种，可以按照电、机械、液压等所謂动作量的性质来分类，也可以按照比例、微分、积分等所謂傳递特性来分类。这里簡单地分为无源元件和有源元件来研究。

1) 无源元件

a) 电气元件——电阻、綫圈、电容器、变压器等等。关于这些，可以参考网絡理論。

b) 机械元件——制动器、质量、彈簧、鉚釘等等。如果以 V 代表速度，以 F 代表力，则这些元件可以各用下列的公式表示出来：

$$F=DV,\quad F=\lambda MV,\quad F=\frac{V}{\lambda C},\quad F_1=nF_2. \tag{7.1}$$

如果使速度同电流相对应，使力同电压相对应，则就可以使这些元件分别同以上的电气元件相对应。又如果使速度同电压相对应，使力同电流相对应，也无不可，这时，质量将对应于电容器，彈簧将对应于綫圈。对于回轉系統，也是同样的，只要取它們的变量的矩即可。

c) 电动机——如果以 V 代表激磁为定值的直流电动机的輸入电压，以 Θ 代表回轉角(图 7.1)，由于有和角速度成比例的反电

动势存在，因而可以得到：

$$V=RJ+k_e\lambda\Theta.$$

另一方面，由于轉矩是和电流成比例，因而可以得到下列的运动方程：

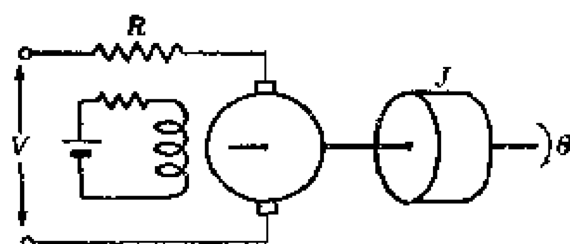


图 7.1

$$k_T I=J\lambda^2\Theta.$$

J 在这里是电动机轉子的轉动慣量。这样，傳递函数就变成：

$$G(\lambda)=\frac{\Theta}{V}=\frac{1}{k_e\lambda(1+T\lambda)}\quad (T=JR/k_Tk_e).\qquad (7.2)$$

如果加上負荷，則 T 将发生变化。这样，无定位元件的傳递函数，在 $\lambda=0$ 时出現极点。

d）发电机——如果把角速度作为輸入，由于能够得到和它成比例的电压，因而用来檢測速度等等很方便。

e）油压活塞——如果把流速（这可以看成是和油压差成比例）当作輸入，把活塞的位移当作輸出，則傳递函数成为下列的形式（图 7.2）：


图 7.2

$$G(\lambda)=K/\lambda.\qquad (7.3)$$

这也是无定位元件的一个例子。

2）有源元件 以下所說明的元件都具有放大作用和单向性。

a）电子管——在負荷为电阻的情形下，如果把栅极电压作为輸入，板极电压作为輸出，則傳递函数是

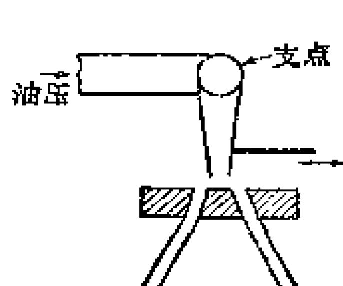
$$G(\lambda)=-gmR.\qquad (7.4)$$

这就是說，一般的頻率可以当作是恒量来处理。

b）发电机——当把激磁电流作为輸入，并且使回轉速度保持一定时，在这种情形下，虽然傳递函数是恒量，但是当把激磁电压作为輸入，而且在輸出方面有电流时，則必須考虑激磁繞組和轉子繞組的阻抗。

c) 可变的电气元件——滑动电阻、可变电容器、可变电感等等，当加以直流或适当的交流电时，就能够把机械的位移变成电的信号，其傳递函数大致可以当作是恒量。

d) 噴射管、导向活塞(图 7.3)——这些都是把位移变成油压的元件，只是它們的非綫性性质稍大。



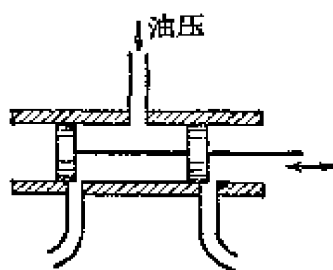


图 7.3

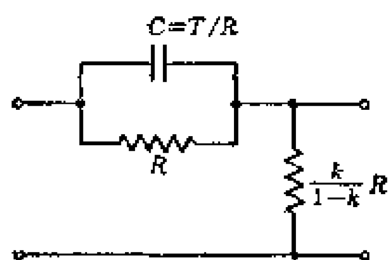


图 7.4

e) 开关——这是切断和接通电流的元件，完全是非綫性的，但是如果周期地切断和接通电路，并且变动开断和关閉的时間比值，则也能够使之实現一种綫性的动作。

以上介紹了几种基本元件。最后，再探求一下常常用来改善自动控制系統特性的 RC 补偿电路的特性❶。这种电路通常可以分为下述的三种类型。

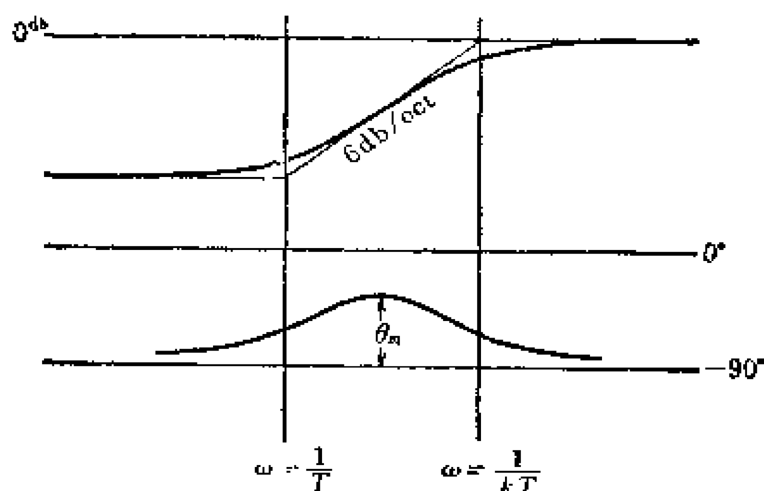


图 7.5

(i) 相位超前的电路　这是为了使某种频率范圍的相位超前的电路，它的形式如图 7.4 所表示。其傳递函数是

❶ 当然，机械系統以及其他系統，也能够作成与此等价的元件。

$$G(\lambda)=k\ \frac{1+T\lambda}{1+kT\lambda}\quad (k<1). \tag{7.5}$$

它的特性可以根据§6很簡单地求出来，如图7.5所表示，但是，由于它的相位是

$$\theta=\tan^{-1}T\omega-\tan^{-1}kT\omega, \tag{7.6}$$

因而它的极大值是

$$\omega_m=1/\sqrt{k}\,T,$$

这就是說，极大值是在 $1/T$ 和 $1/kT$ 的几何平均点上，并且

$$\theta_m=90^\circ-2\tan^{-1}\sqrt{\alpha}.$$

图7.6就表示出这种关系。

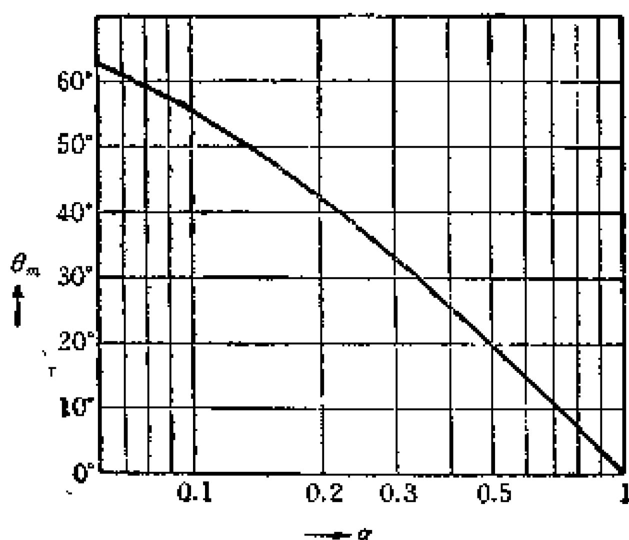


图 7.6

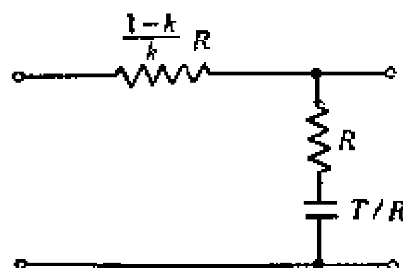


图 7.7

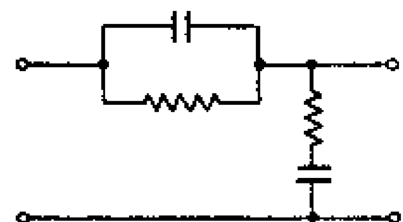


图 7.8

（ii）相位滞后的电路 它的作用和超前的电路的作用完全相反。电路的形式如图7.7所表示，其傳遞函数是

$$G(\lambda)=\frac{1+T\lambda}{1+\frac{T}{k}\lambda}\quad (k<1).$$

它的特性的形状，和超前电路的特性比較，剛好上下反轉。但是在低頻率側其增益逐漸均衡，而漸近于0db。

（iii）相位超前和滞后的电路 是兼有上述两种电路特性的

电路，其形式如图 7.8 所表示，其特性大体上如图 7.9 所表示的形状。

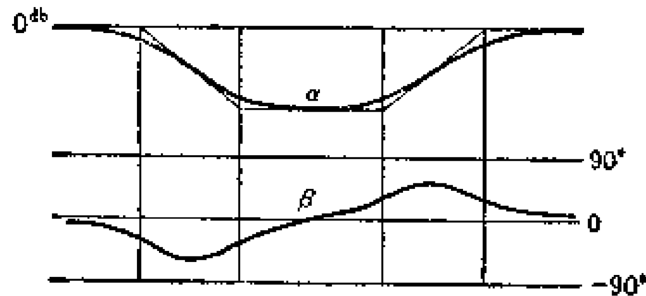


图 7.9

§8 方 框 图

在研究傳遞信号的系統时，应用方框图有許多方便。所謂方框图，是指把系統各部分的动作用图 8.1(a) 所表示的那样填写有傳遞函数的方框表示出来，再把这些方框用(b)所表示的比較点和(c)所表示的分支点联接起来，而作成可以表示整个系統的动作的图。方框不一定和元件本身相对应，而仅仅表达信号的傳遞方式，因此，它的意义和电路图等等不同。

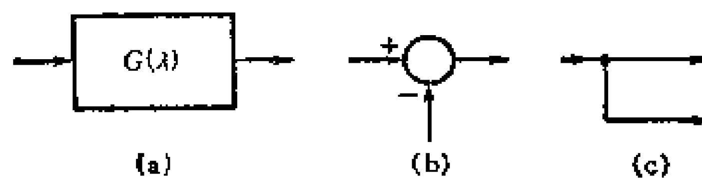


图 8.1

通常只要給出一个运动方程，就可以据以作出方框图。例如在两个变量的情形下，如果运动方程由

$$Y_1 = T_{11}Y_1 + T_{12}Y_2 + T_{10}X,$$

$$Y_2 = T_{21}Y_1 + T_{22}Y_2 + T_{20}X$$

代表，就可以画出如图 8.2 所表示的那样的方框图。图 8.3 表示由双向性元件 Z_2 結合起来的两个閉路，其中有电流 I_1、I_2 流过。

如果用方框图把它們表示出来，就成为图 8.4(a) 所表示的那样的情况。从这个图上可以看出，由于 Z_2 是双向性的，因而信号能够从第2閉路回到第1閉路。这也可以画成如(b)那样的形式。左侧的方框，虽然对应于第1閉路，但是由于 Z_2 是双向性的，因而它也受到第2閉路的元件 Z_3 的影响。在这种情况下，最好把整个系統合在一起，如(c)所表示的那样。与此相反，如图 8.5 所表示的两个閉路，它們是用发电机那样的单向性元件联接起来的，如果如图 8.6 所表示的那样，把各个部分的傳递函数填入方框，然后联接起来，就可以很簡单地把这种系統表示出来。

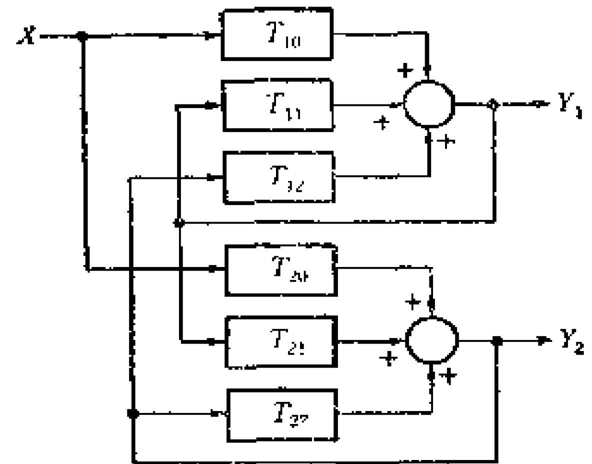


图 8.2

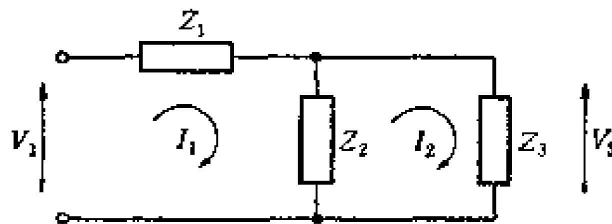
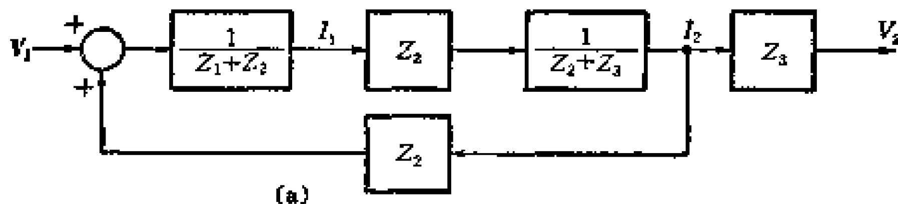
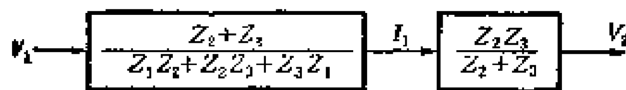


图 8.3





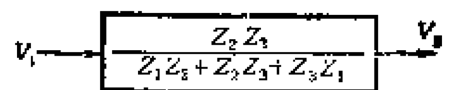


图 8.4

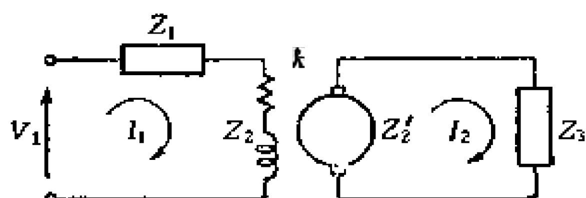


图 8.5

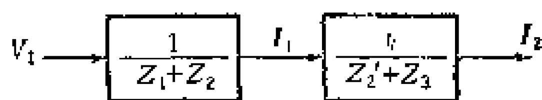


图 8.6

如以上所說明的，即使是同一个系統，也可以画成不同形式的方框图。在实际工作中，最好把适当范圍的方框归并成为一个，以便比較醒目。这时，必須注意使单向性元件，即不能向反对方向傳送信号的部分，对应于方框图的夹縫。

第3章　自动控制系統及其特性

§9 反　饋

当系統用方框图表示时，有的情形如图 9.1 所表示的那样，从一个方框出来的信号，巡行一定的路徑之后，又进入原来的方框。这种情形通常叫做反饋。图中 A 所代表的部分是从系統的輸入方面向輸出方面傳送信号的部分，叫作**正向綫路**。B 是向相反方向傳送信号的部分，叫作**反饋綫路**。A、B 合在一起而組成的、信号巡行一周的整个綫路，叫做**反饋回路**。实际上往往也有正向綫路和反饋綫路不能区分开来的情形。

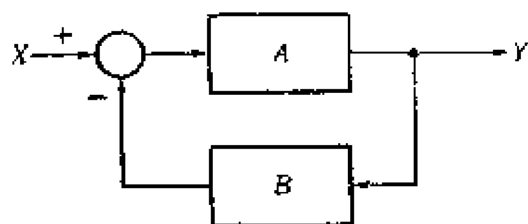


图 9.1

有时也有这样的情形，虽然在方框图中有反饋回路，然而在实际的系統中，例如上节的图 8.3 所表示的那样的系統，正向綫路和反饋綫路是由同一元件形成的。我們所感覺兴趣的反饋系統，不是指这样的情形，而是指含有单向性元件的、正向綫路和反饋綫路互相分开的、并且在反饋回路中有放大作用存在的那种情形。

当輸入信号和反饋信号在比較点被加在一起时，使原来的輸入信号变大的情形叫作正反饋，而使原来的輸入信号变小的情形叫作負反饋。因为自动控制系統是要使輸入和輸出的差減小的裝置，所以当然必須采用負反饋。由于这样的原因，在图 9.1 的比較点上写成从輸入信号减去反饋信号的形式。然而，如果认为信号的极性在回路的中間是可以改变的，則不論用正或是用負都可以表示，因此，这样的形式就具有一般性。此外，还有这样的情形，在同一个系統中，由于頻率的不同，有时作正反饋，有时作負反饋。

反饋系統，如果把它的方框图用运动方程表示出来，其傳递函数就可以立即求出。例如，对于图 9.1，在輸入信号 $X(\lambda)$ 和輸出信号 $Y(\lambda)$ 之間成立下列的关系：

$$Y(\lambda)=A(\lambda)\{X(\lambda)-B(\lambda)Y(\lambda)\}.$$

从这个公式求 $Y(\lambda)$，就可以知道系統的傳递函数能够写成下列的形式：

$$K(\lambda)=\frac{A(\lambda)}{1+A(\lambda)B(\lambda)}=\frac{A(\lambda)}{1+G(\lambda)}. \tag{9.1}$$

这里，由于

$$G(\lambda)=A(\lambda)B(\lambda) \tag{9.2}$$

是巡行回路一周的傳递函数，所以叫做**回路傳递函数**。实际上，傳递函数应該是 $-G(\lambda)$，以使比較点成为負号，但是由于負的形式在处理上不方便，因而通常多采用以上所說的那种定义。

現在，如果把回路在一个地方切断，并且在信号前进方向的綫路中加上1的所謂单位信号❶，則从另一方面将有 $-G(\lambda)$ 的信号傳送回来。这个信号同原来信号的差是

$$F(\lambda)=1+G(\lambda), \tag{9.3}$$

它叫作**回輸差**(return difference)。

以上考察了最簡单形式的反饋，但是通常一个系統中所含有的反饋的数目不只一个。在这种情形下，虽然可以根据所含有的回路的数目分为二重反饋、三重反饋等等，但是从理論上来探討所謂反饋次数則更方便。反饋次数可以定义为：要想使系統沒有反饋而必須在框图上切断的綫路的最小数目。例如，如果在图 9.2 上把 × 号的一个地方切断，則反饋就完全消失，因此，它是一次

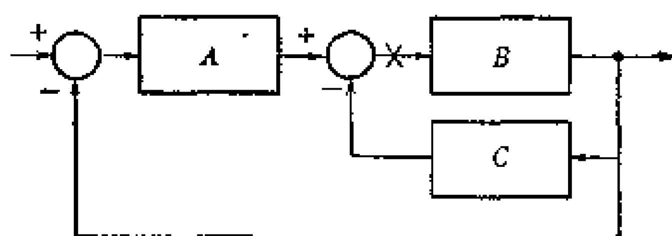


图 9.2

❶ 就时間方面来說，就是 $\exp(\lambda t)$ 的信号。

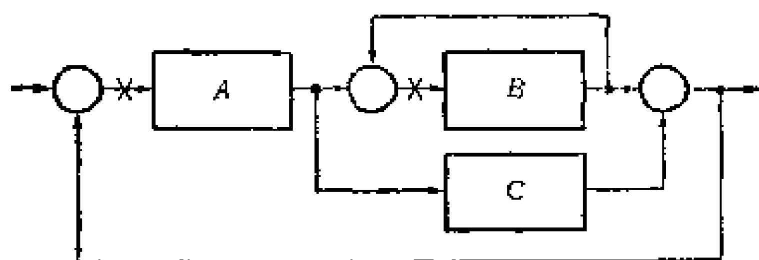


图 9.3

的；用同样的方法，可以判断图 9.3 是二次的。

反饋是 0 次的系統，也就是不含有反饋的系統，其傳遞函数，可以从各个方框的傳遞函数，只通过积与和的演算求出。如果在图 9.4(a) 那样的方框图中，把比較点都集中到最后的部分而作出等价方框图，使之和(b)相等价，这就可以清楚地看出。通常，n 次的反饋系統能够变换成为具有 n 个比較点的形式。例如，在 $n=2$ 的情形下，成为图 8.2 那样的形式，其各个方框的傳遞函数 T_{ij}，只用整理以前的方框的傳遞函数的积与和就可以表示出来。这样，n 次的反饋系統的运动方程組可以写成下列的形式：

(a)

(b)

图 9.4

$$\left.\begin{array}{l}(1-T_{11})Y_1-T_{12}Y_2-\cdots-T_{1n}Y_n=T_{10}X,\\ -T_{21}Y_1+(1-T_{22})Y_2-\cdots-T_{2n}Y_n=T_{20}X,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ -T_{n1}Y_1+T_{n2}Y_2-\cdots+(1-T_{nn})Y_n=T_{n0}X.\end{array}\right\}\qquad(9.4)$$

以 Δ_n 代表这些公式左边的系数的行列式。如果使 X 等于 0，把 Y_n 的綫路切断，并且在信号前进方向的綫路中加上单位信号，这

时，方程組将变成

$$(1-T_{11})Y_1-T_{12}Y_2-\cdots-T_{1,n-1}Y_{n-1}=T_{1n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$-T_{n1}Y_1-T_{n2}Y_2-\cdots-T_{n,n-1}Y_{n-1}+Y_n=T_{nn};$$

因而

$$Y_n=\frac{\Delta_{n-1}-\Delta_n}{\Delta_{n-1}}=1-\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Δ_{n-1} 代表 Δ_n 的左上 $n-1$ 次的子行列式。由此可以得到，对于 Y_n 的綫路的回輸差等于

$$F_n=1-Y_n=\Delta_n/\Delta_{n-1}. \tag{9.5}$$

其次，如果以 F_{n-1} 代表对于在 Y_n 的綫路被切断的状态 F 的 Y_{n-1} 的綫路的回輸差，則用同样的方法可以得到

$$F_{n-1}=\Delta_{n-1}/\Delta_{n-2}.$$

继續重复这个步驟，最后可以得到公式

$$\Delta_n=F_nF_{n-1}\cdots F_1. \tag{9.6}$$

这是以后考察稳定性时的必要的公式。

§10　稳定性及其判断

控制系統通常都具有放大的作用，因此属于有源系統。由于有源系統的內部有能源，因而即使輸入为零，也有可能在輸出方面出現随着时間而变化的运动。因此，对于有源系統来說，稳定性的判断是一个重要的問題❶。

現在我們来研究一下自动控制系統怎样会变得稳定。通常在实际的傳送系統中，如果輸入信号变化緩慢，就能够得到准确的輸出响应；但是当变化的速度較大时，或是由于各部分的质量的影响，或是由于在电的系統中有寄生电容存在等等的影响，輸出响应就有迟滞产生。这里考察一下图10.1所表示的系統。如果把它

❶　关于稳定性的定义，請参看校后記中文献[2, 3, 11～13]。——校者注

的反饋回路切断，在切断处加进去一个正弦波信号 x，然后考察巡行回路一周而来到的信号。在频率較低时，輸出信号(正弦波)的相位同輸入信号的相位相反而成为負反饋，但是随着頻率变高，相位的推移变大，終于在某一个頻率上，輸出信号和輸入信号同相。现在，如果用电位計等使放大器的增益和相位无关地变化，并且使它从小的增益逐漸增加，則巡回一周而回来的信号終于达到在振幅和相位方面都和原来的信号完全一致的状态。如果在这种状态下把回路連接起来，則即使并不从外部給与信号，振动仍然会一直循环继續下去。如果使增益再增加，則通常振动就会变成发散的。

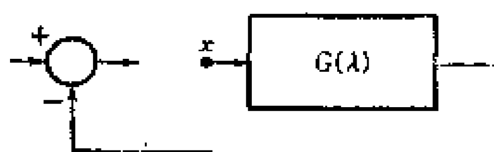


图 10.1

以上只是从現象上来說明。如果应用运动方程或傳递函数，就能够更直接、而且也更严密地論証稳定性的問題。如在 § 3 中所說明，稳定性的条件是在右閉半平面內并沒有方程的系数行列式的零点，从而沒有傳递函数的极点存在。

一次反饋系統的傳递函数可以写成

$$K(\lambda)=\frac{G(\lambda)}{1+G(\lambda)} \tag{10.1}$$

的形式。由此可知，$K(\lambda)$ 的极点和 $1+G(\lambda)$ 的零点完全一致。这样，反饋系統的稳定性，就可以根据

$$F(\lambda)=1+G(\lambda) \tag{10.2}$$

的零点是否限制在左半平面內来加以判断。在多重反饋的情形下，就它的主回路仍然能够列出(10.1)那样的公式。只是在这种情形下，$G(\lambda)$ 本身也变成具有反饋的傳递函数，至于稳定性的判断方法并无不同。对于多重反饋的情形，根据前节所說明的行列式 Δ_n 来加以考察的方法，較为严密。

在求 (10.2) 的零点时，当然可直接进行計算，但是往往很費

力，而且在研究設計問題时，大多使 $G(\lambda)$ 中的某个参数是可变的，需要适当地选擇它的值，以使系統穩定。因此，这方面的研究越来越变得重要。由于这样的理由，曾經研究过种种不同的实用的方法。以下介紹两三种具有代表性的研究方法：

1) 根軌迹法❶ 最适合用作可变参数的是增益，令

$$G(\lambda)=kG_0(\lambda), \tag{10.3}$$

而把 $G_0(\lambda)$ 加以固定，仅仅使 k 变化。求出这时的

$$1+kG_0(\lambda)=0 \tag{10.4}$$

的根的軌迹，就是所謂根軌迹法。这个軌迹向右半平面移动时的 k 的值，就給出穩定的界限。在求这样的軌迹时，不需要对上列公式一一求解，通过以下所說明的簡便方法可以比較容易地得到結果。首先把(10.4)写成

$$G_0(\lambda)=-1/k \tag{10.5}$$

的形式而加以考察。显然，根是在 $G_0(\lambda)$ 采取負实数值的綫上，特别是当 $k=0$ 时，它和 $G_0(\lambda)$ 的极点相一致，而当 $k=\infty$ 时，它和零点相一致。这就是說，当 k 从 0 变化到 ∞ 时，根从 $G_0(\lambda)$ 的极点出发，并且在 $G_0(\lambda)$ 采取負实数值的綫上移动，最后在零点終止。$G_0(\lambda)$ 采取負实数值，意味着 $\angle G_0(\lambda)$ 等于 $-180°+n\times360°$，这个 $\angle G_0(\lambda)$ 可以用几何学的方法求出如下。以 λ_1、λ_2、… 代表 $G_0(\lambda)$ 的零点，以 λ_1'、λ_2'、… 代表极点，并且使

$$G_0(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots}{(\lambda_1-\lambda_1')(\lambda-\lambda_2')\cdots}, \tag{10.6}$$

則

$$\angle G_0(\lambda)=\sum\angle(\lambda-\lambda_\nu)-\sum\angle(\lambda-\lambda_\nu').$$

但是 $\angle(\lambda-\lambda_\nu)$ 是連接点 λ 和点 λ_2 的綫与实軸所成的角，可以如图 10.2 那样求出。为此，可以使点 λ 按照种种的方式移动，找出 $\angle G_0(\lambda)$ 等于 $-180°+n\times360°$ 的地方。和这样所求出的 λ 相对

❶ 参看校后記中参考文献[16，1]。——校者注

应的 $|G_0(\lambda)|$ 的值，仍然可以根据点 λ 和各零点、极点之間的距离用几何学的方法計算出来。如果再取它們的倒数，就可以得到那些点的 k 的值。

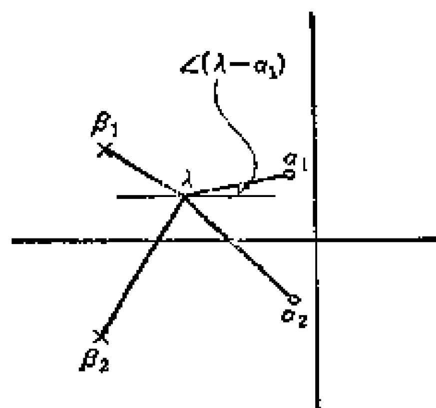


图 10.2

由于軌迹相交的点是鞍点，在其附近角度的变化很小，因而上述的方法不很精确。在这种情形下，可以使

$$\frac{dG_0(\lambda)}{d\lambda}=\sum\frac{1}{\lambda-\lambda_\nu}-\sum\frac{1}{\lambda-\lambda_\nu'}=0,$$

而求出交点。当这些交点位在实軸上时，可以很簡单地求出来(参照下例)。

此外，在 n 阶的零点以及极点的附近，軌迹接近于互相成 $360°/n$ 的角度的直綫。特别是如果无限远的点是 n 阶的零点，則軌迹的漸近綫互相成 $360°/n$ 的角度。由此可以知道，如果无限远的点是 3 阶以上的零点，則必然有着不稳定的区域存在。

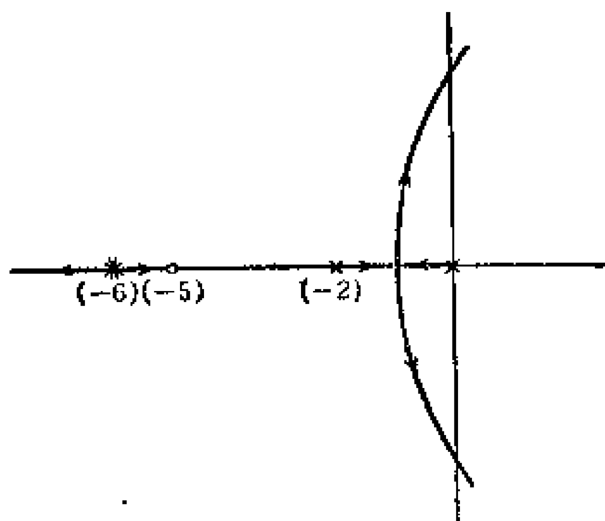


图 10.3

下列公式

$$G(\lambda)=k\frac{(\lambda+5)}{\lambda(\lambda+2)(\lambda+6)^2} \tag{10.7}$$

就是一个例子，这种情形可以用图 10.3 表示。

2) Nyquist 曲綫 以上所說明的方法，虽然在能够直接知道根的位置方面具有优越性，但是如果系統很复杂，計算就相当困难。反之，以下所說明的 Nyquist 的方法，是只要根据 $G(\lambda)$ 在虛軸上的值，即頻率特性，就可以判断系統的穩定性。这

种方法在实用上非常方便。

現在試来考察一个有理函数 $F(\lambda)$。如果其零点和极点各以 λ_1、λ_2、…，λ_1'、λ_2'、… 代表，則可以写成

$$F(\lambda)=F_0\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots}{(\lambda-\lambda_1')(\lambda-\lambda_2')\cdots} \qquad (10.8)$$

的形式。如果把这个 $F(\lambda)$ 当作一个映象函数，試来考察一下 λ 平面上的閉曲綫是怎样地映象在 $F(\lambda)$ 平面上的。为此，取表示 $F(\lambda)$ 零点的因数中的一个，并且使

$$\lambda-\lambda_1=ae^{j\theta}.$$

如以前所說明，θ 可以用連接 λ_1 和 λ 的直綫与实軸所成的角度表示出来。現在如果使 λ 如图 10.4 的实綫所表示的那样，沿着不把 λ_1 包含在内的閉曲綫的周圍，順时針方向巡行一周，然后又回到原来的位置，θ 虽然变化，但是仍然恢复到和原来相同的数值。然而当如图的虛綫所表示的那样，使 λ 沿着把 λ_1 包含在内的閉曲綫巡行一周时，則 θ 剛好減少 360°。如果按照同样的做法，使 λ 沿着把一个极点包含在内的閉曲綫的周圍、順时針方向巡行一周，則其因数（例如 $1/(\lambda-\lambda_1')$）的相位角剛好增加 360°。因此，如果一个閉曲綫在内部包含 $F(\lambda)$ 的 Z 个零点和 P 个极点，則当 λ 在这个閉曲綫上順时針方向巡行一周时，$F(\lambda)$ 的相位角剛好減少 $360°\times(Z-P)$。在 $F(\lambda)$ 平面上来說，那意味着这个閉曲綫的映象是环繞着原点、順时針方向巡行 $Z-P$ 周的閉曲綫。

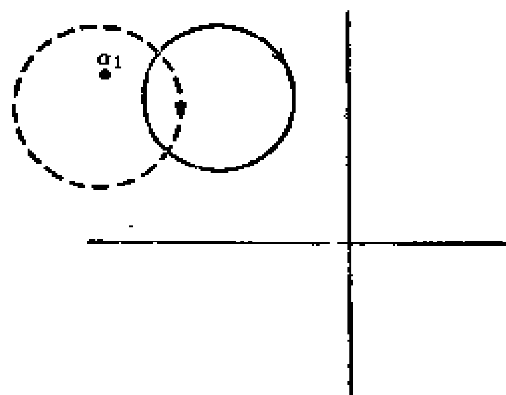


图 10.4

然而現在所要考察的是在右半平面内的零点和极点，因此，作为 λ 平面上的閉曲綫，可以如图 10.5 所表示的那样，取虛軸和半

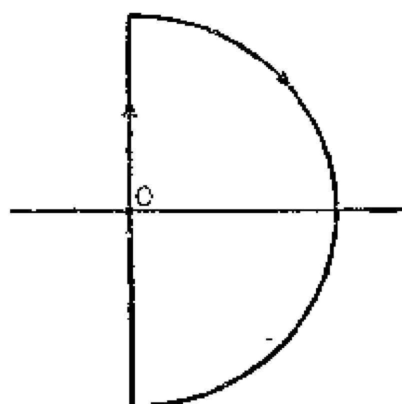


图 10.5

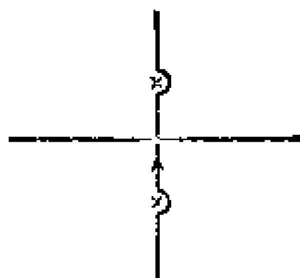


图 10.6

圓所組成的閉曲綫,并且使半圓的半徑足够大。实际上,在大多数情形下,无限远的点是正則的，这时，由于半圆的映象集中成为一点,因而只要考慮虛軸就够了。此外,有时在虛軸上有极点或零点存在,为了除掉它們,可以如图 10.6 所表示的那样,使之沿着小半圓而在右側回行。这样得到的閉曲綫,叫作 Nyquist 曲綫❶。

反饋系統的稳定性，如前所述，决定于 $1+G(\lambda)$ 的零点是否在右半平面內。为了簡单起見,先假定 $G(\lambda)$ 在右半平面內沒有极点,然后对于 $1+G(\lambda)$ 作出上述的曲綫。曲綫应該是順时針方向、环繞原点的周圍回行的閉曲綫，回行的周数应該剛好等于右半平面內的零点的数目,因此,系統的稳定性的条件是这个閉曲綫不包圍原点。在实际工作中，不是对于 $1+G(\lambda)$ 而是对于 $G(\lambda)$ 画出 Nyquist 曲綫,并且观察这个曲綫是否包圍点 $(-1,0)$，这种方法比較方便❷。

其次，$G(\lambda)$ 本身在右半平面內有极点的情形不論是怎样的，作为稳定性的必要而充分的条件是环繞点 $(-1,0)$ 的周圍、逆时針方向回行,回行的周数剛好等于极点的数目。

---

❶ 当 $F(\lambda)$ 为一个 λ 的代数多項式时,文献內常称之为 Михайлов 曲綫。請参看校后記中参考文献[14, 15]。——校者注

❷ 这种方法对于采样系統也同样可以应用，只是要取 z 平面的单位圓来代替虛軸。

通常对于n次的反饋系統，可以根据前节所說明的行列式Δ_n的零点来判断稳定性。现在，如果假定构成系統的各个方框的傳递函数是稳定的，则能够用它們的积与和表示出来的T_{ij}也是稳定的，Δ_n在右閉半平面内就沒有极点。但是，由于

$$\Delta_n=F_nF_{n-1}F_{n-2}\cdots F_1,$$

因而为了使得Δ_n在右半平面内沒有零点，可以使F_1、F_2、…、F_n的零点的数目的和与极点的数目的和相等。因此，首先把二次以上的反饋綫路切断，用 Nyquist 的方法求出回輸差F_1在右閉半平面内的零点和极点的数目的差；其次，在三次以上的反饋綫路被切断的状态下，对于F_2进行同样的步驟，一直求到F_n为止，这样，就能够对于稳定性作出判断。

以上是根据 Nyquist 曲綫来判断稳定性的方法的原理。在实际应用这种方法时，并不需要就虛軸的全部，而只要就原点以上的上半部画出图来就够了。这是因为，在物理上可能的系統的$G(\lambda)$，是对于实数的λ采取实数值的函数❶，对于这种函数成立

$$G(-j\omega)=G(\overline{j\omega})$$

的关系，对应于上半部和下半部的映象，如图10.7所表示的那样，对于实軸来說是对称的。

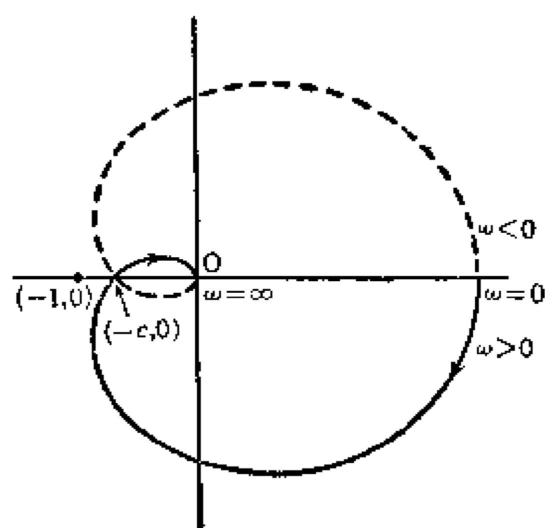


图　10.7

图10.7是稳定情形的典型的曲綫。在这种情形下，如果以$(-c,0)$代表負的实軸和曲綫的交点，则$1/c$这个量就是表示稳定程度的一个标准。这是因为，不論增益由于何种原因增大，但是如

❶　更确切的讲，当$G(\lambda)$是两个λ的实系数多項式的分式时，文内指出的关系总能成立。——校者注

果增大的比例不超过 $1/c$ 倍，则系統仍然是稳定的。这个 $1/c$ 可以用 db 为单位来表示，叫作**增益稳定余量**。此外，如图 10.8(*a*) 所表示，通过点 $(-1, 0)$ 画一个增益为定值的圆，把这个圆和曲綫的交点用直綫和原点連接起来，这个直綫与負的实軸之間的角度，由于同样的理由，叫作**相位稳定余量**❶。

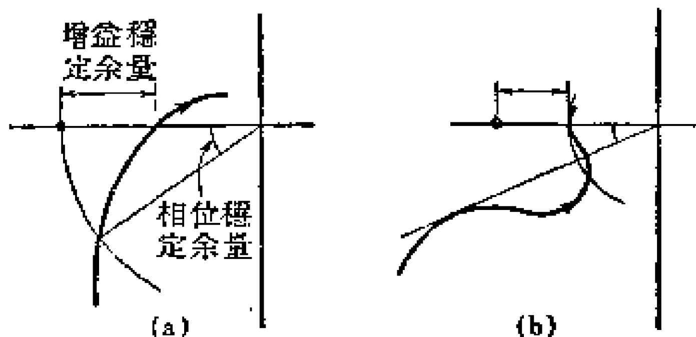


图 10.8

在进行設計时，虽然大多是如以上所說明过的那样，使 $G(\lambda) = kG_0(\lambda)$ 而把 k 适当地确定出来，但是在这种情形下，如果先画出 $G_0(\lambda)$ 的曲綫，然后代替 $(-1, 0)$ 而对于种种不同的 k 描画出 $(-1/k, 0)$ 的点，就能够比較容易地把适当的 k 求出来。

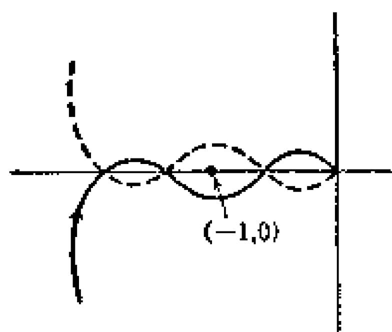


图 10.9

以上的情形是形状比較簡单的曲綫。有时也有形状如图 10.9 所表示的那样的情形。这种情形，虽然由于点 $(-1, 0)$ 位在閉曲綫的外部，因而是稳定的，但是因为通常在系統最初开始运轉时增益从低值状态逐漸增加，所以就会通过中間的不稳定区域而产生暫时的发散振动。如果是完全綫性的系統，当增益再行增加而进入稳定的区域內时，振动就应該衰減下来，但是实际的系統对于較大的輸入必然是非綫性的，而且其等价的增益減少，因此，振动一旦变大，大抵就会一直停留在不稳定的状态。由于这样的理由，图 10.9 那

❶ 另外一种方法是，使增益下降到增益稳定余量在 0db 以下，这时取最大的相位移动的点来确定相位稳定余量，如图 10.8(*b*) 所表示的那样。

样的形式叫作条件稳定。反之，图 10.7 那样的形式可以叫作絕对稳定。自动控制系統通常多設計为絕对稳定的。

3) 增益相位曲綫　Nyquist 曲綫虽然給出一种应用解析函数映象原理的巧妙的判断方法，但是由于它的坐标刻度是算术尺，因而当增益的变化轉大时，曲綫就很难容納在一張图幅之內。因此，有人曾經考虑只把矢量的絕对值用对数尺表示而作出同样的曲綫。这种曲綫不能根据解析函数的映象，也不可能根据保角映象去求出曲綫附近的值。如果取增益、相位角分别作为纵軸和横軸，并且用直角坐标表示，这个問題就可以解决。在这种情形下，虽然似乎应該采用奈貝和弧度作为单位，但是在实用上多习惯于把保角映象的点加以忽略而采用分貝和度作为单位。当然，应用这种单位来判断稳定性也并无不可。这样的曲綫叫作增益相位曲綫。在 Nyquist 曲綫上的点 $(-1, 0)$，在这种图上变成 0db、$-180°$ 的点。当用这种图来判断稳定性时，虽然不能够簡单地表达出来，如 Nyquist 曲綫那样，但是在普通的情形下，当軌迹在 0db、$-180°$ 的点的右側通过时，如图 10.10 所表示的那样，就可以說是稳定的。对于一般的情形，如果把这种情形联系到 Nyquist 曲綫而考虑将成为怎样的形状，可能就不难作出判断。

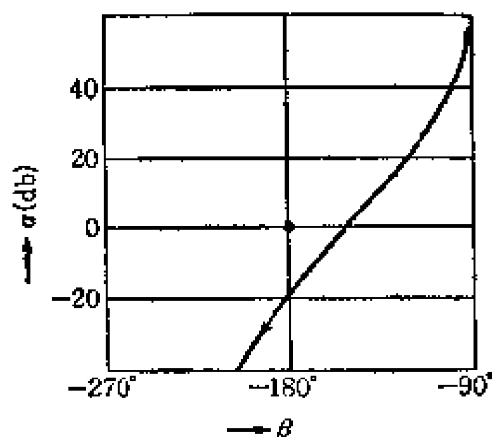


图 10.10

4) Bode 曲綫❶　Bode 曲綫，也就是在横軸上取 ω 的对数刻度、在纵軸上分别取增益和相位而画出来的曲綫，用来解决設計的問題，效果很好。根据这种曲綫来判断稳定性时，大体上可以按照下列方法进行考察。

❶ 我国文献中多称为对数幅相频率特性。——校者注

(i) 增益等于 0db 时的相位，如果在 $\pm 180^\circ$ 之間，則是稳定的。

(ii) 相位等于 $\pm 180^\circ$ 时的增益，如果在 0db 以下，則是稳定的。

严格地說来，这种判断方法并不完善。但是对于通常所遇到的那样简单的形状，也就是增益随着频率一直下降的形状，在这种情形下，采用这种方法可以满足要求。对于特性复杂的情形，可以作出 Nyquist 曲綫来考察。根据 Bode 曲綫描画出 Nyquist 曲綫的大致形状，是十分容易的。

§ 11 自动控制系統的特性

图 9.1 那样的反饋系統的傳递函数，可以用 (9.1) 表示出来。这里，如果假定 $|G(\lambda)|$，也就是回路增益大大地大于 1，则

$$K(\lambda) \approx 1/B(\lambda). \tag{11.1}$$

这就是說，反饋系統的傳递函数，在回路增益較大的范圍內，只用反饋綫路的傳递函数就可以确定。这是反饋系統的重要特征。由此可知，系統的傳递函数不大受到正向綫路的傳递函数的影响。如果写出公式

$$\frac{\Delta K(\lambda)}{K(\lambda)} \approx \frac{1}{1+G(\lambda)} \frac{\Delta A(\lambda)}{A(\lambda)}, \tag{11.2}$$

那就可以更清楚地看出。不論这个 $A(\lambda)$ 的变动的原因是什么，是随着频率变化，或者是由于外部的影响而随着时間变化，或者是由于信号的振幅而变化的情形，也就是非綫性的变化的情形，在所有这些情形下，其影响都可以減輕。

以上所說明的是傳递函数的变动，也就是作为积而作用在信号上的变动。以前所說明过的外部扰动，虽然也可能有这样的影响，但是除此以外，作为和而直接加到信号上的影响是最普通的情

形。外部扰动的种类很多，加上去的地方也各各不同。例如如果象图 11.1 所表示的那样，把外部扰动加到正向綫路的中間，則对应于外部扰动的輸出变成：

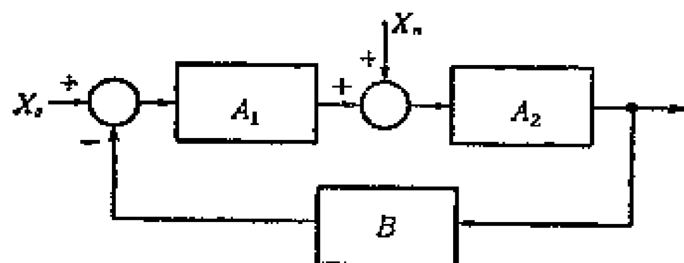


图 11.1

$$Y_n(\lambda)=\frac{A_2(\lambda)}{1+G(\lambda)}X_n(\lambda). \tag{11.3}$$

因此，如果 $|A_2(\lambda)|$ 小于 $|G(\lambda)|$，則右边的系数变小。然而，因为 $|B(\lambda)|$ 通常不会很大，所以 $|A_1(\lambda)|$ 必須較大。換句話說，当外部扰动是加在正向綫路的較后的一段上时，其影响就可以減輕。

以下需要考察一下应用反饋的自动控制系統的特性。为此，与其研究形式过于一般化的，不如研究形式尽可能地簡单化的，然后在实际的情形中再适当地加以补充，这样的作法比較方便。由于这样的理由，以下取图 11.2 的形式作为标准的形式来研究。在 §2 中所說明的图 2.2 也是这种形式。其他任何的形式，包括含有多重反饋的情形在內，如果把它們的主回路加以整理，最后都可以变成这种形式。

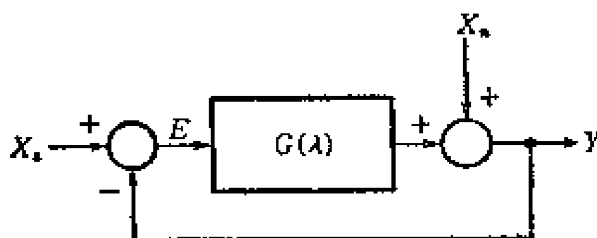


图 11.2

通常对自动控制系統所要求的特性是，对于目标値的輸入信号要忠实地傳送，而对于外部扰动等不必要的信号要尽可能地不傳送。归根結蒂，这不外是要把目标値和受控量的偏差尽可能地縮小。通过反饋，这是可能的，这从以前所說明过的性质大体上可以知道。虽然統称为偏差，但是实质上它总是时間的函数，因此，在关于究竟应該用怎样的标准作为依据来判断它的大小方面还存在着种种問題。

一种方法是根据偏差的面积，也就是，如果以 $\varepsilon(t)$ 代表偏差，要使

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varepsilon(t)|dt \quad 或 \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varepsilon(t)|dt \tag{11.4}$$

最小。但是在实际問題中，这种方法所需要的計算很繁，最后除了进行探試法之外，沒有其他办法。

第二种方法是根据偏差的二次面积，也就是要使

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(t)^2dt \quad 或 \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varepsilon(t)^2dt \tag{11.5}$$

最小。这归根結蒂不外是要使偏差的信号的能量以及功率最小。这样，这些积分具有明确的物理內容，比起前一种方法来，其判斷更为容易。原因是由于这些积分有可以分別变換的能量譜、功率譜的积分，因而能够直接地根据系統的频率特性进行判断。

現在考察一下图 11.2。假定信号的能量是有限的，并且用频率成分表示出来，則可以得到

$$Y(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}X_s(j\omega)+\frac{1}{1+G(j\omega)}X_n(j\omega). \tag{11.6}$$

因此，偏差 $E(j\omega)$ 能够写成下列的形式：

$$\begin{aligned}E(j\omega)&=Y(j\omega)-X_s(j\omega)\\&=\frac{1}{1+G(j\omega)}\{X_n(j\omega)-X_s(j\omega)\}.\end{aligned} \tag{11.7}$$

如果假定目标值和外部扰动两者完全无关，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}x_n(t)x_s(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_n(j\omega)\overline{X_s(j\omega)}d\omega=0, \tag{11.8}$$

因而可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|E(j\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{1+G(j\omega)}\right|^2\{|X_n(j\omega)|^2+|X_s(j\omega)|^2\}d\omega. \tag{11.9}$$

同样，在功率有限的信号的情形下，如果它們的功率譜用 P_s、P_n、

P_s 代表，則可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_s(j\omega)d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{1+G(j\omega)}\right|^2\{P_n(j\omega)+P_s(j\omega)\}d\omega. \quad (11.10)$$

因此，問題变成是，当已經給出 P_n、P_s 时，怎样求出 $G(j\omega)$，使得那个积分的值小于某一个确定的值。如果使 $|G(j\omega)|$ 相当地大，那当然就沒有什么問題，但是在可能条件下，要使这个値尽可能地小，这样，制造就比較容易。

如果 $P_n(j\omega)$、$P_s(j\omega)$ 具有有限的頻率，并且在这个范圍內暫时选擇 $|G(j\omega)|$，使之大大地大于 1，則积分近似地等于

$$\int_0^{\omega_1}\{P_n(j\omega)+P_s(j\omega)\}/|G(j\omega)|^2d\omega. \quad (11.11)$$

这里，如果要根据回路平均增益等于定值的条件，也就是根据

$$\int_0^{\omega_1}\log|G(j\omega)|d\omega=\text{const} \quad (11.12)$$

这个条件来求极小值，則可以使

$$|G(j\omega)|=|G_0(j\omega)|\{1+\varDelta(j\omega)\},$$

并且根据
$$\int_0^{\omega_1}\varDelta(j\omega)d\omega=0$$

的条件来使变分等于 0. 这样，就得到

$$\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{P_n(j\omega)+P_s(j\omega)}{|G_0(j\omega)|^2}\right\}=0,$$

于是可以得到：

$$|G_0(j\omega)|^2=A\{P_n(j\omega)+P_s(j\omega)\}. \quad (11.13)$$

这就是說，可以选擇 $|G_0(j\omega)|^2$，使之和輸入的功率譜有相同的形式。

以上是以簡单的条件为依据进行了研究。但是在实际的情形中，$G(j\omega)$ 的形式也不可能过分任意地变化，而且輸入的譜大多

也是一直扩展到 $|G(j\omega)|$ 变小的范圍。这时，就必須分别按照各种不同情形的条件来找出适当的形式。

按照控制系統的不同，有时目标值和外部扰动是大致地固定不变的，有时是比較緩慢地变化的。在这样的情形下，如果把傳递函数在原点的周圍展开，使

$$\frac{1}{1+G(\lambda)}=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots, \tag{11.14}$$

則能够写成

$$\varepsilon(t)=a_0x(t)+a_1\frac{d}{dt}x(t)+a_2\frac{d^2}{dt^2}x(t)+\cdots. \tag{11.15}$$

$$(x(t)=x_n(t)-x_s(t))$$

如果知道 $x(t)$ 的大小和变化速度，就能够据以判断偏差的大小。假如 $x(t)$ 在較长时間内大致是固定不变的，則上式中只剩下第一項。它叫作恒定偏差❶。因为

$$a_0=1/\{1+G(0)\}, \tag{11.16}$$

所以要减小恒定偏差，使 $G(0)$ 加大即可。特别是当 $G(\lambda)$ 有极点位在原点时，恒定偏差将完全消失。这时，由于

$$a_1=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda/G(\lambda), \tag{11.17}$$

因而如果使极点的留数加大，則 a_1 变小。如果更使它在原点有二阶极点，則 a_1 也等于 0，即使对于以固定的速度变化的輸入，偏差也等于 0。这是稳定性的界限，极点的阶数不可能增加到这个数目以上❷。

以上考察了輸入大体上是固定不变的情形。在某种情形下，輸入有可能特别含有某种角频率 ω_0 的正弦波成分。这时，如果使

❶ 系数 a_i，$i=0, 1, \cdots, n, \cdots$，称为誤差系数。若 $a_0=0$，称为静差系統。若 $a_0=a_1=\cdots=a_\mu=0$ 而 $a_{\mu+1}\neq 0$，則称为 μ 次无静差系統。——校者注

❷ 但是有一些控制系統，那里 $a_2=0$，即原点是 $G(\lambda)$ 的三次或更多次极点，而稳定性依然可以用相应措施保証。——校者注

它在 $\lambda=j\omega_0$ 的周圍展开，偏差就能够判断出来。假如那种成分是固定振幅的成分，則如果使 $G(\lambda)$ 在 $j\omega_0$ 有一阶的极点，偏差就完全等于 0。

要使它在原点有极点，应用无定位型的元件卽可。至于要使它在其他的点有极点，如果应用适当的正确的局部反饋，那也是可能的。

在判断控制系統的特性时，还有一个观点是过渡特性。这种特性比較重要，所以另在下节中专門討論。

§12　自动控制系統的过渡特性

目标值和外部扰动突然变为另外的值的情形是时常会遇到的。例如，把某一个負荷接連到正在运轉中的电动机上，就是很好的例子。由于这样的輸入信号含有較高的頻率成分，因而系統不可能追随上去，在受控量最后稳定在目标值之前，必須經过一段时間。考察这一期間的状况，就属于过渡特性的問題。

首先，取单位阶跃函数作为輸入。对应于这个輸入的輸出，就是公式(3.13)所表示的指数响应 $h(t)$。如前所述，如果以 λ_1、λ_2、…代表傳递函数的极点，則 $h(t)$ 可以用

$$a_\nu t^r e^{\lambda_\nu t} \tag{12.1}$$

这样形式的項的和表示出来。如果极点是一阶的，当然 $r=0$。但是在这样的項之中，其 λ_ν 的实数部分保有絕对值較大的負值时，比較容易衰减消失，最后剩留下来的是实数部分的絕对值最小的，也就是只和 λ 平面上最右側的极点相对应的运动。因此，只要考察这样的項，就能够知道过渡特性的大致形状。

这里不再继續求极点和展开为部分分式，而是想要研究根据頻率特性直接近似地推論出过渡特性的方法。为此，首先求对应于二次傳递函数

$$K(\lambda)=\frac{\omega_0^2}{\lambda^2+2\zeta\omega_0\lambda+\omega_0^2} \tag{12.2}$$

的指数响应。这很容易計算。当 $\zeta<1$ 时，

$$h(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t+\cos^{-1}\zeta\right); \tag{12.3}$$

当 $\zeta=1$ 时，

$$h(t)=2-e^{-\omega_0 t}(1+\omega_0 t); \tag{12.4}$$

此外，当 $\zeta>1$ 时，由于有两个不同的实根，因而与其采用最右側的极点的做法，当然不如从一开始就采用

$$K(\lambda)\approx\frac{\omega_1}{\lambda+\omega_1}\quad\left(\omega_1=(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\,\omega_0\right) \tag{12.5}$$

的形式，而使

$$h(t)\approx 1-e^{-\omega_1 t}. \tag{12.6}$$

图 12.1 表示这些波形。要想使响应加快，首先必須使 ω_0 加大，但是，对于相同的 ω_0，当 ζ 的值在

$$0.3<\zeta<1$$

的范圍內时，运动就可以比較迅速地穩定下来。作为設計的标准，通常采用 ζ 的值在

$$0.3<\zeta<0.45 \tag{12.7}$$

的范圍內。

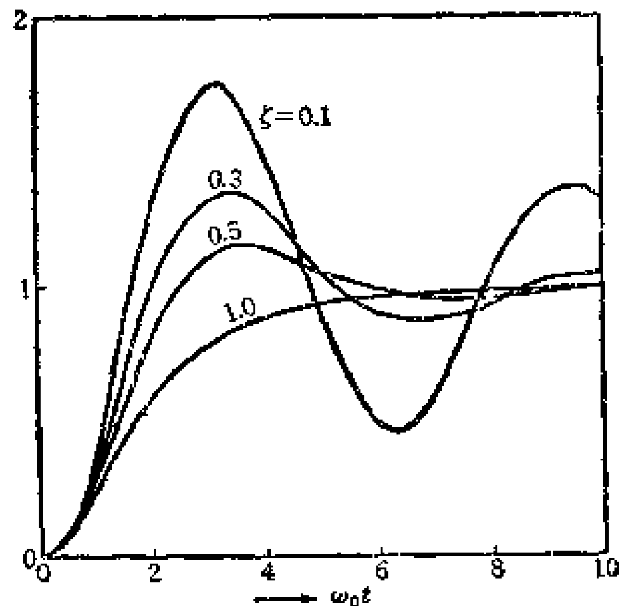


图 12.1

另一方面，从图 6.3 上可以知道，对应于采取这样的值的 ζ 的傳递函数的对数幅频特性，从平坦部分变到每一个倍频程等于 -12db 的斜率的部分上，出现小峰的形状。如果以 M_p 代表 $|K(j\omega)|$ 的最大值，則

$$M_p=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}},\qquad(12.8)$$

因而 $0.3<\zeta<0.45$ 相当于

$$1.25<M_p<1.8.$$

这样，从对数频率特性的峰値高度就可以大致求出过渡特性的大小。

然而，反饋系統对于目标値的傳递函数是

$$K_s(\lambda)=\frac{G(\lambda)}{1+G(\lambda)}.\qquad(12.9)$$

这里，如果使

$$M=|K_s(j\omega)|=\frac{|G(j\omega)|}{|1+G(j\omega)|},\qquad(12.10)$$

则在表示 $G(j\omega)$ 的复变数平面上，M 等于常数的点的軌迹成为如图 12.2 所表示的那样的圓。这是因为，如果考察代表 $G(j\omega)$ 的点，这些点和原点的距离是 $|G(j\omega)|$，和点 $(-1,0)$ 的距离是 $|1+G(j\omega)|$，因此，M 等于常数的軌迹就是和两点的距离之比为常数的点的軌迹，也就是 Apollonius 圓。如果把这些曲綫画出来，就能够从 Nyquist 曲綫上讀取 M 的値，特别是其最大値 M_p 的値。其次，如果把和这些圓相直交的 $\angle K(j\omega)$ 为定値的軌迹也一同画出，那就更方便。

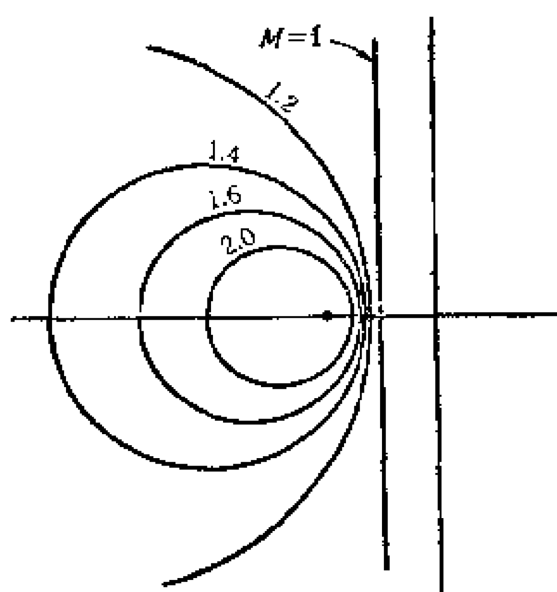


图　12.2

同样的曲綫也能够在幅相特性曲綫上画出来，如图 12.3 所表示。这种图有时叫作 Nichols 曲綫。

以上的方法，对于外部扰动的傳递函数

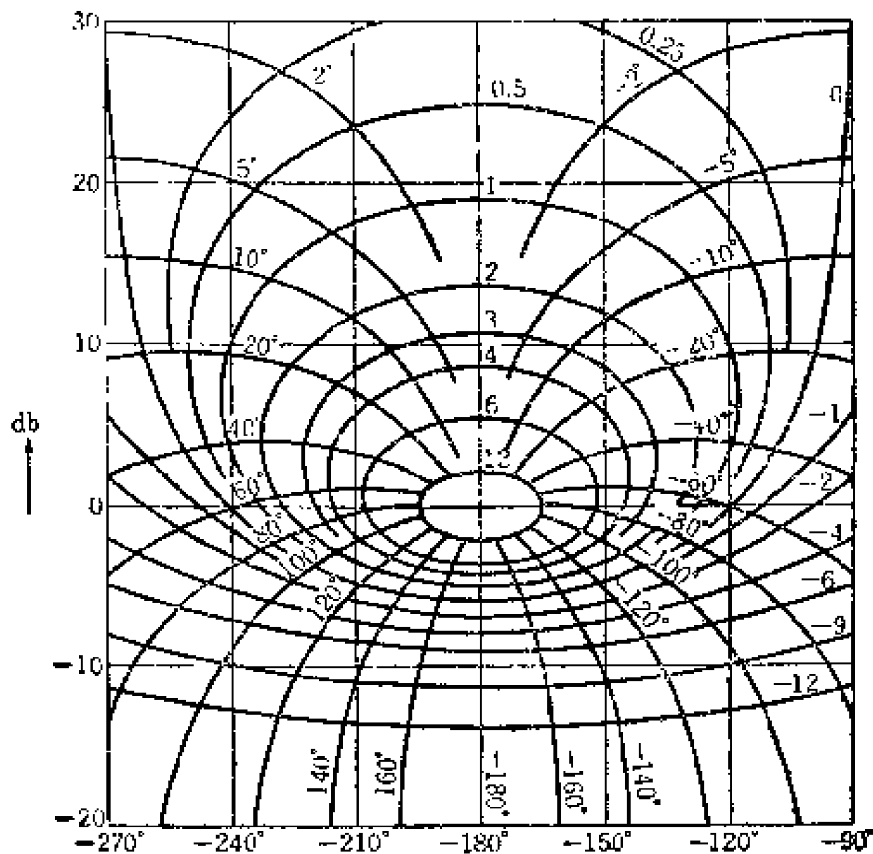


图 12.3

$$K_n(\lambda)=\frac{1}{1+G(\lambda)},$$

也可以应用。如果将上式改写作

$$K_n(\lambda)=\frac{G(\lambda)^{-1}}{1+G(\lambda)^{-1}},\tag{12.11}$$

就可以看出，当代替 $G(\lambda)$ 而取它的倒数时，则对应于 $K_s(\lambda)$ 的关系仍然成立。如果将 Nichols 曲綫轉动，使上下左右交换位置，仍然能够应用。

对于 Bode 曲綫，虽然并沒有从图上直接讀取 M_p 的値的方法，从图 10.8 上可以看出，如果 Nyquist曲綫的形状是簡单的，則可以根据增益稳定余量和相位稳定余量近似地求出。这样得到的标准是：

增益稳定余量 6～8db 以上

相位稳定余量 30～45°

左右。

以上説明了根据增益的峰值推求过渡特性的方法。此外，还有一种方法，是以 Nyquist 曲綫或幅相特性曲綫，应用保角映象的原理，进行解析的延拓，而求出根的近似值。这也就是說，把 Nyquist 曲綫当作是由解析函数 $G(\lambda)$ 得到的映象；把幅相特性曲綫看作由解析函数 $\log G(\lambda)$ 得到的映象。幅相頻率曲綫图虽然通常用分貝、度等实用单位表示，但是当它是用奈貝、弧度表示时，如果两軸的刻度間隔不同，就不能成为保角映象。此外，必須注意，如果取纵軸作为增益，横軸作为相位，有时映象会反轉过来。图 12.4 就是一个例子。在这例中，从 ω 軸的映象进行解析延拓而作成小方形，然后求出对应于点(0db、$-180°$)的 λ 的值。这个值可以近似地求出如下：从这个点向 ω 軸的映象作垂綫，用附近的 ω 的刻度的尺度量出垂綫的长度，就可以得到实数部分 σ_0；从垂綫的足点讀取 ω_0，就可以得到所需要的根 $\sigma_0+j\omega_0$。

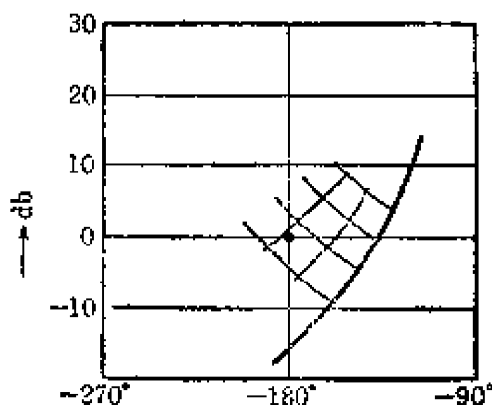


图　12.4

在这种情形下，如果以 φ 代表垂綫和横軸所夹的角，如图 12.5 所表示的那样，則垂綫的长度可以根据相位稳定余量 β_0 而写成

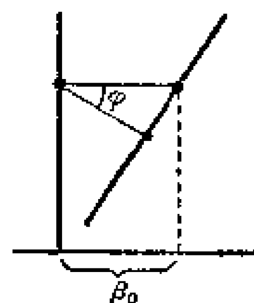


图　12.5

$$\beta_0/\cos\varphi$$

的形式。另一方面，ω 的刻度可以根据增益 α 的变化率而写成

$$\frac{d\alpha}{d\omega}\Big/\cos\varphi.$$

因此，

$$\sigma_0=\beta_0\Big/\frac{d\alpha}{d\omega}.$$

但是这式可以改写成

$$\zeta=\frac{\sigma_0}{\omega_0}\approx\beta_0\frac{d\alpha}{d\log\omega},$$

这样的形式更方便。这时，如果 $d\alpha/d\log\omega$ 用每一个倍频程的 $-6n$ db 表示，β_0 用度表示，就能够得到

$$\zeta\approx\frac{\beta_0}{60n}. \tag{12.12}$$

以上只考察了位在 λ 平面上最右側的极点。在进行設計时，虽然这样的簡化是十分必要的，但是在設計工作中，如果可能，应該求出更精确的过渡特性，假如它不能够满足，就应該进行若干修正，以得到所期望的特性。要想稍微精确地求出过渡特性，比較方便的方法是对于频率等于以前所說的 ω_0 的五～十分之一的矩形波求出对应于它的响应。由于对应于这样的周期性的波的响应可以用 Fourier 級数表示出来，因而只要計算它的最前面的几項，就能够比較容易地求出近似解。

第4章　自动控制系統的設計方法

§13　理想的控制特性

为了使控制系統的偏差小，虽然首先要使回路增益尽可能地大，但是如以前所說明的，对应于高頻率的增益，无論如何也不可能上升到超过某种一定的程度。因此，如果只使低頻率的增益上升增大，则增益的斜率变大，相位的回轉也随着变大，最后，系統終于变成不稳定的。那末，在稳定的范圍之內，增益究竟可以上升到怎样的程度呢？

首先假定傳递函数在高頻率区域內可以漸近地用

$$G(\lambda)\approx\left(\frac{\omega_c}{\lambda}\right)^n \qquad (13.1)$$

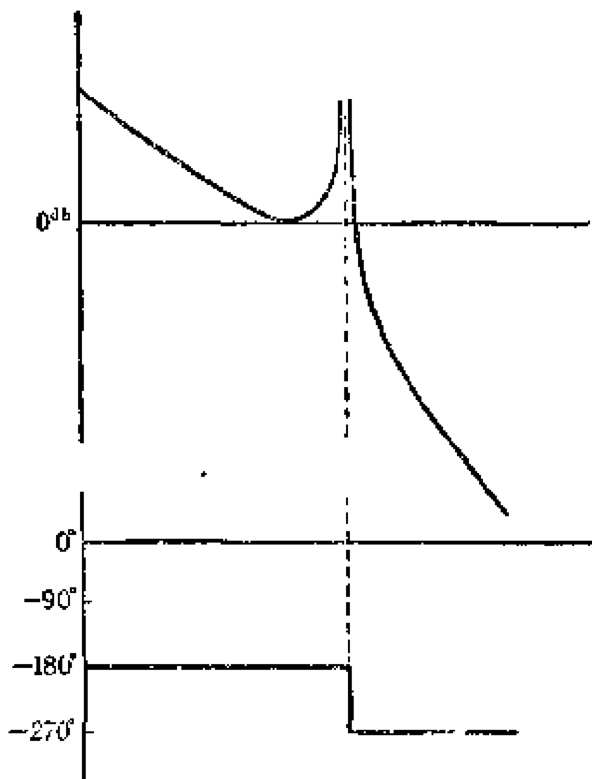


图　13.1

表示。由于这个形式，当 $\omega=\omega_c$ 时，增益等于 0db，因而把这个 ω_c 叫作截止頻率。而且其幅頻特性曲綫的斜率是每一个倍頻程等于 $-6n$db，同时，相位等于 $-n\times 90°$。由此可知，当 $n=1$、2 时，相位差不会超过 180°，因此，把原来的特性原封不动地延續到低頻率也无不可，但是当 n 在 3 以上时，就必須設法使增益下降到 0db 时的相位差保持在 180° 以下。对于

在右半平面内是正則的函数，满足这种条件的极限的形式是

$$G(\lambda)=\frac{\omega_c^n}{\lambda^2(\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2})^{n-2}}. \qquad (13.2)$$

但是在确定 ω_1 时，必須保証使 $|G(j\omega)|$ 的极小値等于 1。ω_1 可以用下列的公式求出：

$$\omega_1^n=\frac{n}{2}\frac{\omega_c^n}{(1-2/n)^{n/2-1}}.$$

以 ω_0 代表变成极小的 ω，則

$$\omega_0^2=\frac{2}{n}\omega_1^2.$$

画出这个函数在 $n=5$ 时的 Bode 曲綫和 Nyquist 曲綫，两个曲綫的形状各如图 13.1 和图 13.2 所表示。图上虛綫所表示的圓周，实际上是半徑等于无限大的圓周。由此可以知道，这个函数可以是避开点 $(-1, 0)$ 以及其左边的負实数軸而回轉的、类似鋸齿的形状。此外，从这个图上也可以知道，n 不可能超过 6。

这个函数在低頻率区域内的形式是：

$$G(\lambda)\approx\frac{\omega_c^n}{\omega_1^{n-2}\lambda^2}.$$

这个函数在截止频率的附近增益变得很大，一般說是不现实

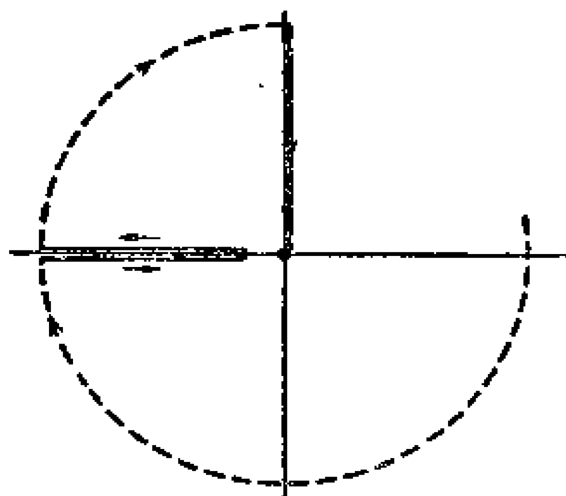


图 13.2

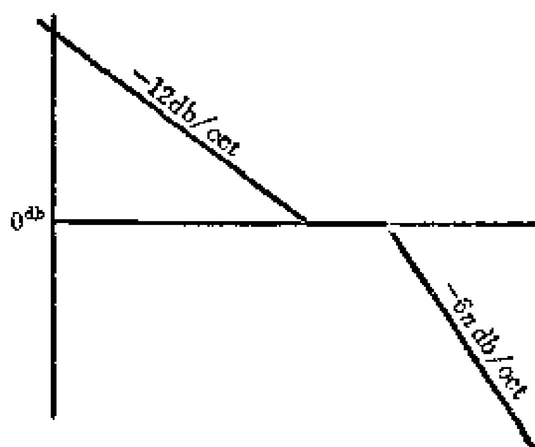


图 13.3

的。幅頻特性在那里一旦下降，就不会再上升。現在就来考察这种特性。图13.3所表示的就是根据这种假設而作出的較典型的特性。这就是說，这种特性在下降到0db之前保持每一个倍频程等于 -12db 的斜率；其次，在向每一个倍频程等于 $-6n$db 的斜率过渡的中間有一个等于0db的平坦部分。由于这种特性可以认为是由每一个倍频程等于 -12db 的特性和另外两个半无限区間傾斜特性組合成的，因而它的相频特性可以按照§6所說明的方法进行計算。这三个特性在低频率的相位分别是

$$-180°, \quad -180°\times\frac{4}{\pi^2}\frac{\omega}{\omega_0}, \quad -180°\times\frac{2n}{\pi^2}\frac{\omega}{\omega_c},$$

为了要使它們的总和等于 $-180°$，可以使

$$\omega_0=\frac{2}{n}\omega_c.$$

在这样选择的情形下的相頻特性，成为如图13.4所表示的那样的形状。从图上可以知道，在 ω_0 的附近有若干相位稳定余量。此外，在低頻率区域内特性曲綫变成

$$G(\lambda)\approx\frac{\omega_0^2}{\lambda^2}=\frac{2^2\omega_0^2}{n^2\lambda^2},$$

这同前一种情形相比，要小一些。

以上所說明的，其低頻率区域的特性曲綫是随着頻率的下降，以每一个倍頻程等于12db的斜率无限制地增大。虽然这对于需要在 $\omega=0$ 的附近有特別大的增益的情形是适合的，但是当需要在整个的有限的頻带內有同样大的增益时，就必須削减低頻率部分的增益，并且利用因此产生的相位的

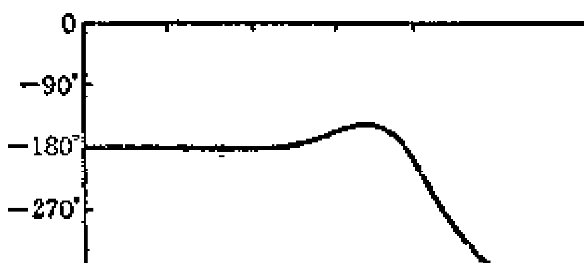


图 13.4

余量，促使频带端部的增益上升。与此相对应的理想特性，应用(6.10)的函数，可以使之成为

$$G(\lambda)=\frac{a}{\left(\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega_1^2}}+\frac{\lambda}{\omega_1}\right)^2}\quad(|\lambda|<\omega_0)\qquad(13.3)$$

的形式。对于在等于 0db 的以上的频率，和以前完全相同。图 13.5 代表相对应的 Bode 曲线。

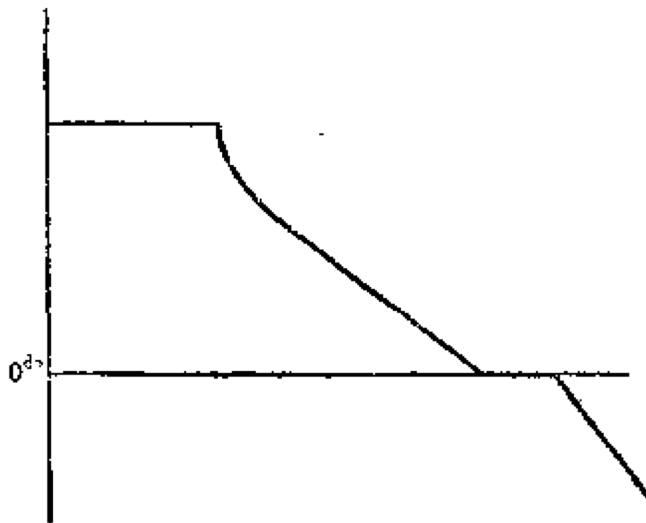


图 13.5

这些特性，不論那一种，都要求在稳定性的界限内得到最大的增益，并保持良好的过渡特性等等。但是在实际上，使之具有适当的增益稳定余量和相位稳定余量仍然是必要的，为了满足这个要求，可以如图 13.6 所表示的那样，使平坦部分的增益作必要的下降，并且使引向这个平坦部分的傾斜部分的斜率小于每一个倍频程 12db。例如，如果假定斜率等于 $12(1-\eta)$db，则可以得到相位稳定余量等于 $\eta\times180°$。和它相对应的函数的形式是：

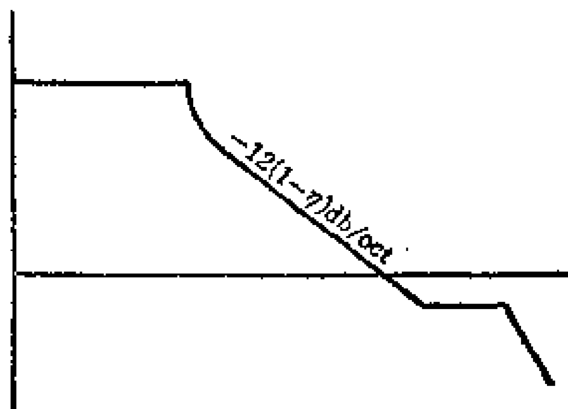


图 13.6

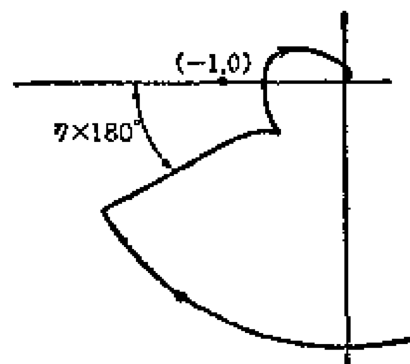


图 13.7

$$G(\lambda)=\frac{a}{\left(\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega_1^2}}+\frac{\lambda}{\omega_1}\right)^{2(1-\eta)}} \tag{13.4}$$

Nyquist 曲綫成为如图 13.7 所表示的那样的形状。

此外，平坦部分的特性不必一定是水平的，或者保持每倍頻程 6db 的斜率，或者作适当的弧形，都无不可，主要地是要保証在从 12db 的斜率向高頻率部分的較大的斜率过渡的阶段中有一个斜率比較緩和的部分，以便減小相位差。

§14 实际的設計方法

当进行設計时，首先必須給出关于系統的目的和控制特性的要求。由于目的的不同，常常是受控对象从一开始就規定出来，有的情形是它在某种范圍內可以自由地选擇。不論是那一种情形，都有必要預先对于它們的特性进行調查。

可以作为所要求的控制特性的，是穩态偏差或偏差的二次方平均数等的大小以及过渡特性等等，以它們为依据，就可以按照 §11 所說明的方法来确定关于回路动态特性的要求。这就是說，根据偏差来确定低頻率部分的增益特性，根据过渡过程来确定增益等于 0 的頻率的下限和相位穩定余量等等。其次，根据低頻率部分的幅頻特性来确定增益下降到 0 的曲綫，在确定时应該如前节所說明，使它不比每倍頻程 −12db 更急剧，最多只能允許如图 13.6 所表示的那样的局部的急剧程度。

当这样把一切必要的特性都求出来之后，就可以适当地选擇受控对象以及将要和它組合在一起的放大裝置，保証它們具有所要求的形式，然后把它們組合起来，成为系統。但是由于那些裝置的参数不是一定能够自由选擇的，因而当然不可能期望得到与理想完全吻合的特性。但是增益值稍大一些并沒有什么妨碍，因此，

只要能够充分地补偿必要的幅频特性，也就够了。此外，在这种情形下，增益下降到 0 的频率最好选擇稍高的数值，以便能够得到为取得相位稳定余量而需要的补偿。

假定这样求出来的特性是如图 14.1 中实綫所表示的那样。那么由于系統不一定是最小相位推移型❶，因而其相位特性不只是由幅频特性的斜率决定。此外，当这种相频特性，如图上所表示的那样，是不稳定的，而且相位稳定余量不足时，可以减低图上的曲綫高度，使增益为 0db 的附近的斜率减小，而使和它相接連的部分的斜率适当地加大，如图上的虛綫所表示的那样。这样就可以保持必要的相位稳定余量。这时的幅频特性，如果其中有一部分小于所要求的特性(以点綫表示)，那末就应該把最初确定的增益加以修正，使之加大。

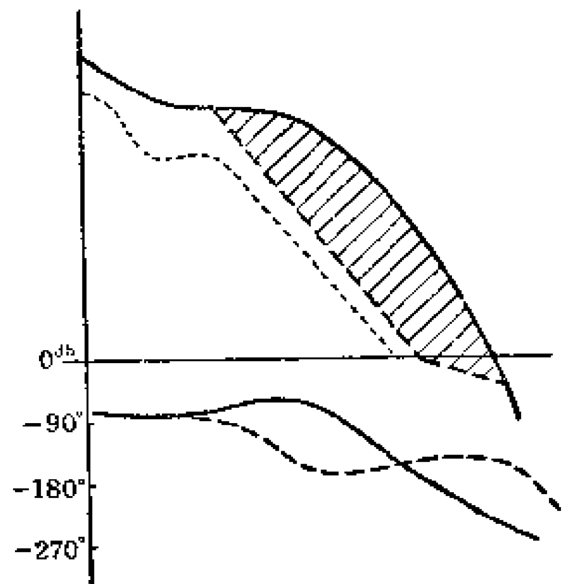


图 14.1

为了使曲綫的形状按照上述的方式改变，可以采用种种适当的方法，例如以局部反饋等等改变元件的时間常数，或者附加上具有相当于图上斜綫部分的衰减特性的元件(这叫作**串联补偿**)，或者把用其他方法檢出的輸出和原来的輸出一同反饋回去(这叫作**并联补偿**)，等等。并联补偿也可以认为是局部反饋的一种❷。

电的系統，在大多数情形下，都能够用簡单的 RC 电路进行串

❶ 參看校后記中參考文献[19]。——校者注

❷ 用以改变频率特性的装置常称之为矫正装置。相应地有串联、并联矫正装置之别。——校者注

联补償。例如，在低频率部分的增益足够大的情形下，可以如图14.2所表示的那样，利用§7中所說明的相位超前的綫路，来牺牲低频率部分的增益而使相位超前。使相位超前可以用包含微分运算的网絡，因而这样的控制有时叫作微分控制。此外，可以如图14.3(I)所表示的那样，是以原来的形式保有适当的相位稳定余量，但是当低频率部分的增益不足时，可以首先使总的增益上升，如(II)所表示的那样，然后再附加上相位迟滞的慣性环节，如(III)所表示的那样。这种控制有时叫作积分控制。根据不同的情况，有时把这两种合并使用，可以收到良好的結果。

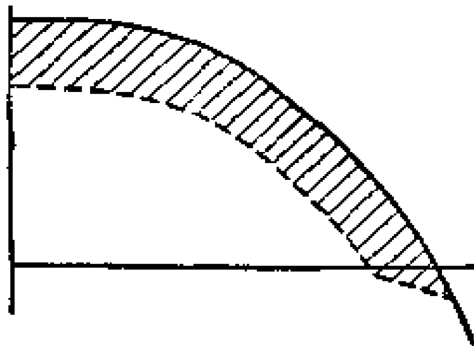


图 14.2

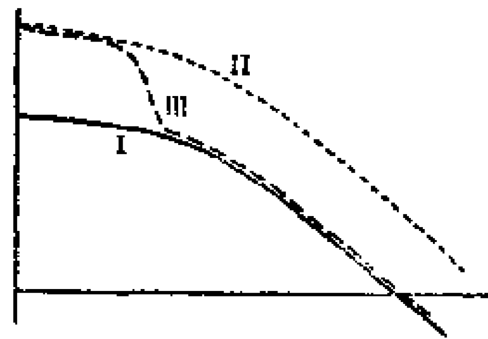


图 14.3

作为一个例子，假定有一个由电动机带动的自动随动系統，其回路傳递函数是

$$G(\lambda)=\frac{a}{\lambda(1+\lambda)(1+\lambda/50)}. \tag{14.1}$$

假定这里的 a 是可以自由选择的。

如果假定 $a=1$ 而作出 Bode 曲綫来，就成为如图 14.4 的实綫所表示的那样。这里，为了使相位稳定余量等于 30°，当使在相位等于 −150° 的頻率的增益等于 0db 时，可以把图上的綫 I 作为增益 0db 的綫。

現在試把相位超前的綫路附加上去。首先选擇它的傳递函数形式为

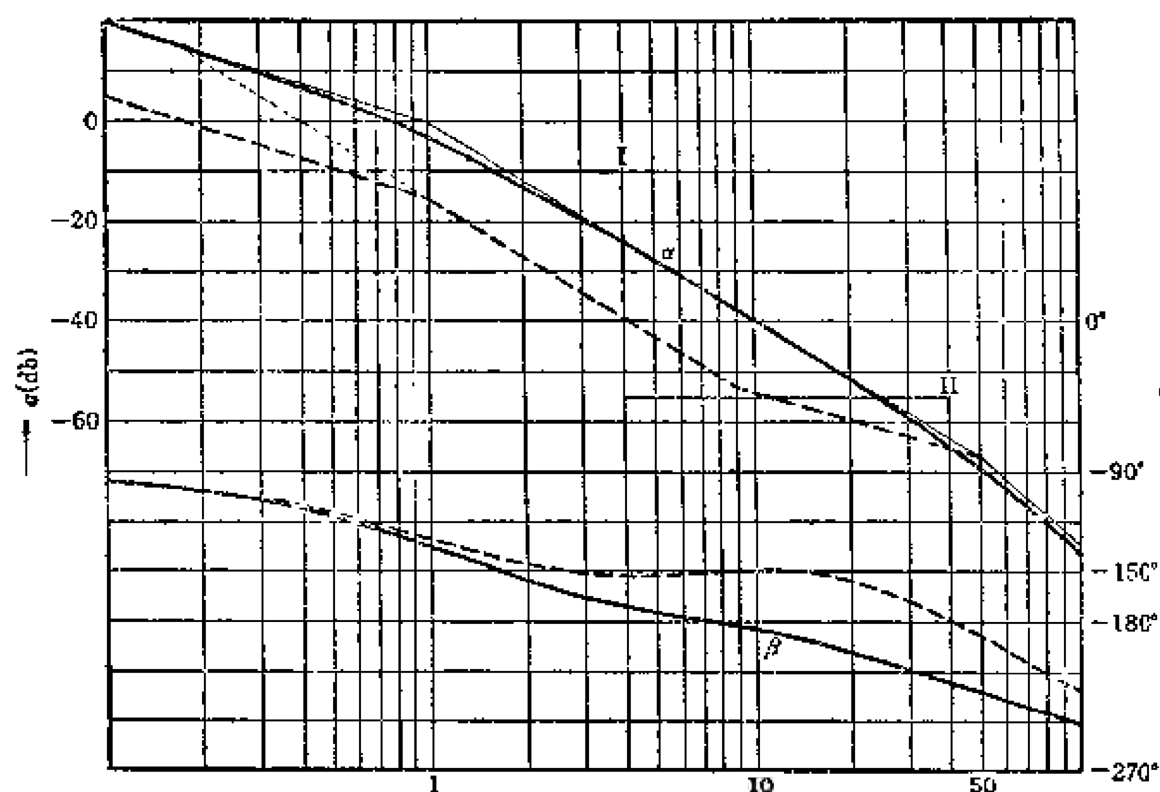


图 14.4

$$G_c(\lambda)=k\frac{1+T\lambda}{1+kT\lambda}\quad(k<1),\qquad(14.2)$$

它的分母的时間常数为 kT，使之等于 1/50，合并到上述特性中 −18db 的斜率开始的部分上，如果参照图 7.6 来选擇 T，使得适当的相位稳定余量能够得到，则 $T={}^1/_9$. 由于这个补偿綫路特性变成图上的虚綫所表示的那样，所以相位特性显著地得到了改善（为了方便起見，增益特性只用漸近綫表示出来）。如果与此相对应，画出 0db 的綫，使相位稳定余量等于 30°，则大致成为如图上的綫 II 所表示的那样。以这条綫同綫 I 比較，可以看出，增益上升了約 45db. 但是实际上低頻率部分的增益，由于补偿綫路的存在，将損失約 15db，所以增益的增加是两者之差 30db.

由于应用了相位超前的綫路，幅频特性曲綫在低頻部分有了显著下降，因而如果应用相位迟滞的綫路，再把这部分的增益提

高，如图上的点綫所表示的那样，就能够得到更好的特性曲綫。在这种情形下，因为高頻部分的相位差不多沒有什么变化，所以 0db 綫仍然可以保持如綫 II 的原狀。于是补償綫路的傳递函数变成：

$$G_c(\lambda)=\frac{(1+\lambda)(1+\lambda/9)}{(1+50\lambda/9)(1+\lambda/50)}. \tag{14.3}$$

其次，作为并联补償的例子，可以把測速发电机接連到电动机上，并把它的輸出电压加到反饋电压上。由于发电机的輸出是和回轉速度成比例的，因而总的开路傳递函数成为

$$G'(\lambda)=(1+k\lambda)G(\lambda), \tag{14.4}$$

这样，高頻率部分的幅頻特性曲綫的斜率能够減小。例如，如果取 $k=1/15$ 左右，則一直到 $\omega=50$ 的附近可以得到相位稳定余量等于 30°。

以上虽然沒有考虑增益稳定余量，但是从图上可以知道，在所有的情形下，它都是足够的。

此外，虽然到現在为止只是应用了 Bode 曲綫来研究設計問題，但是当特性曲綫更为复杂时，也可以联合应用 Nyquist 曲綫和对数頻率特性曲綫等等，最后再計算出过渡过程，如果不能滿足要求，則需要另外作补償綫路的选择。

当 $G(\lambda)$ 如 (14.1) 式所表示的那样，属于比較簡单的有理函数时，常能够直接求出补償綫路的参数值。为此，假定参数仍然是未知数，对于公式

$$1+G(\lambda)G_c(\lambda)=0 \tag{14.5}$$

进行整理，应該使它的各个根的实数部分都尽可能成为絕对值大的負值。在补償綫路中通常有几个自由参数，对它們的适当选擇可以使几个根的实数部分相等（共軛根算作一个），并使其值最合乎理想。利用这种关系，在大多数情形下，各个参数都可以比較容易地被确定。例如，当在三次式中有两个参数时，可以使之成为

$$(\lambda+\sigma)^3=0$$

的形式，如果需要使三个根的和等于 a，可以令 $a/3$ 代表实根的这种关系。

§15 利用局部反饋改善特性

如前节所述，为了改善控制系統的特性，有时需要改变其元件的时間常数。局部反饋可以用来作为一种手段。

首先，如果把图15.1那样的反饋加到时間常数等于 T 的元件上，則系統的傳递函数变成

$$K(\lambda)=\frac{a/(1+T\lambda)}{1+ab/(1+T\lambda)}=\frac{a/(1+ab)}{1+\{T/(1+ab)\}\lambda},$$

它的时間常数等于 $T/(1+ab)$。图15.2表示出它的形状。这种方法并不仅仅限于一次的系統，通常在系統的某个局部加上反饋，就可以使增益大致一定的頻带变寬。

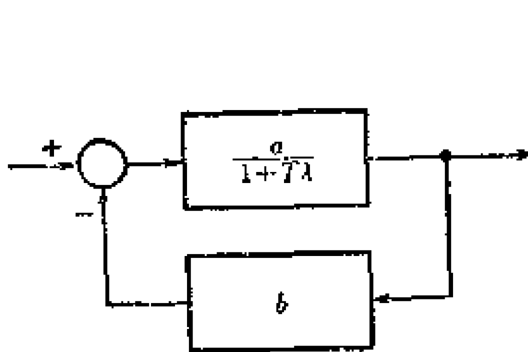


图 15.1

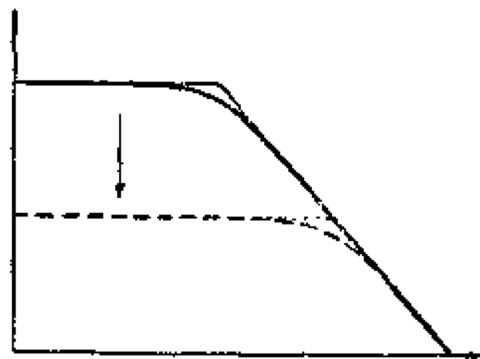


图 15.2

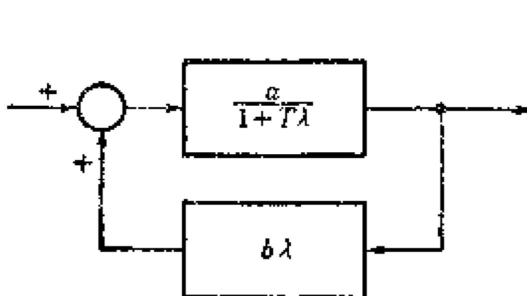


图 15.3

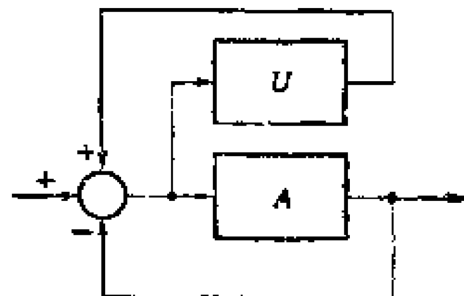


图 15.4

以上是利用負反饋的情形。在某种情形下，也可以利用正反饋来改善系統的特性。例如，如图 15.3 所表示的那样，如果把在高頻率使增益下降的元件的輸出，通过在高頻率使增益上升的微分装置而使之成为正反饋，則变成

$$K(\lambda)=\frac{a/(1+T\lambda)}{1-ab\lambda/(1+T\lambda)}=\frac{a}{1+(T-ab)\lambda},$$

时間常数减少到 $T-ab$。特别是如果使 $T=ab$，則可以使时間常数等于 0。

此外，有时也为了使系統开路增益加大的目的而采用正反饋。所謂二重反饋放大器就是这样的例子。例如，图 15.4 所表示的情形的傳遞函数是

$$K(\lambda)=\frac{A(\lambda)}{1-U(\lambda)+A(\lambda)},$$

如果能够使

$$U(\lambda)=1,$$

則可以得到

$$K(\lambda)=1.$$

当然，这不是在一切的頻率下都能够成立的，但是在必要的頻带內有可能使这种关系成立。

最后，举出图 15.5 的例子，这虽然不是局部反饋，但它是一种减小外部扰动的影响的方法❶。这种方法是不論用什么方法把外部扰动檢測出来，然后加到放大段的中間。和这种情形下的外部扰动相对应的傳遞函数是

$$K_n(\lambda)=\frac{1-G_n(\lambda)G_2(\lambda)}{1+G_1(\lambda)G_2(\lambda)},$$

---

❶ 讀者可以注意到，图 15.5 的所謂反饋与前面所讲的有本质上的区別，前面所列举的均为对偏差信号的矯正，而这里則是对外扰的补償。后者对控制系統的內部結构沒有影响。——校者注

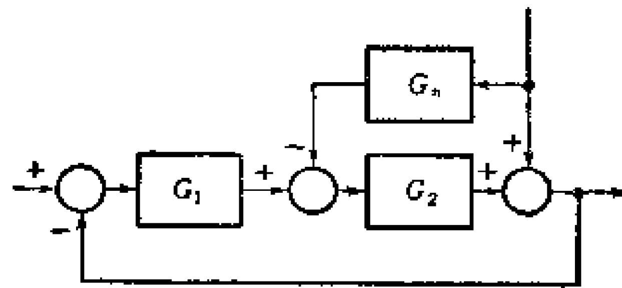


图 15.5

如果能够使

$$G_n(\lambda)G_2(\lambda)=1,$$

則外部扰动的影响就会完全消失。但是除非 $G_n(\lambda)$、$G_2(\lambda)$ 是最小相位推移型的，否則，这是不可能的。即使是不可能完全等于 1 的情形，通常使它在 $\lambda=0$ 的附近等于 1 总是可能的，因此，通过这种方法，就能够把 $\lambda=0$ 附近的偏差，即靜态偏差消除。这种方法实质上不外是一种开路控制。

参考文献

以下只限于有代表性的。

[1] R. A. McColl: Foundamental Theory of Servomechanisms (V. Nostrand, New York, 1945).

[2] H. M. James, N. B. Nichols, R. S. Phillips: Theory of Servomechanisms (McGraw-Hill, New York, 1947).

[3] W. R. Ahrendt, J. F. Taplin: Automatic Feedback Control (McGraw-Hill, New York, 1951).

[4] G. J. Thaler, R. G. Brown: Servomechanism Analysis (McGraw-Hill, New York, 1953).

[5] 高橋安人：自动制御理論(岩波，东京，1954)。

[6] J. G. Truxal: Automatic Feedback Control System Synthesis (McGraw-Hill, New York, 1955).

[7] 電気学会、電気通信学会：自動制御の理論と応用(コロナ社，东京，1957)。

校后記

宋　健

很多現代应用数学的分支是从工程技术問題中抽象出来进而发展起来的。自动控制理論就是这样产生和发展着的一門学科，它与微分方程、变分法等学科有着不可分割的依賴关系。在第二次世界大战前后，自动控制理論的研究內容和方法几乎完全是基于古典微分方程之上的。只有在最近十年来，由于工业技术迅速发展的需要，自动控制理論的研究范圍才开始扩大。目前它已經广泛地应用現代抽象数学的方法，例如变分法[17]、泛函分析[24]、概率論[21,22]、数理邏輯[1]等等，去研究解决控制技术中提出的数学問題，并已經获得了很大成就。

自动控制理論的迅速发展已使它成为現代应用数学中的一个独立的学科。这个学科的发展对近代工业技术的进步起了且将继續起着重要的指导作用。另一方面，自动控制理論以它新穎的課題充实了現代应用数学的內容，扩大了它的范圍。特别对微分方程和变分法的发展起了刺激作用。正是由于这些原因，早在四十年代著名的数学家 Колмогоров А. Н. 和 Wiener N. 等人便开始注意到与控制論直接有关的数学問題的研究。近十年来世界各国的数学界对控制理論的研究已投入了相当龐大的力量，并已有了显著的成績。

日本喜安善市和池野信一合写的"自动制御理論"这本小册子，做为現代应用数学丛书中的一部分，其目的是概略地介紹自动控制理論中的一个重要的方面——頻率法的理論基础和它的应用范圍。作者在这短短的几十頁的篇幅內将这一部分作了簡洁的介

紹。它对欲熟悉自动控制理論的数学工作者們有一定的参考价值。因此，将它譯成中文可能会有助于我国学术界了解这个新学科的一个方面。

由于篇幅緊凑，作者們在編写此书时沒有选擇严謹的純数学叙述的方法，这是可以理解的。本书假定讀者已經对自动控制理論有了初步知識和基本概念。否則可先讀一讀如后附参考文献[1]內的前几章。由于目前我国采用名詞不甚統一，书內某些用語需加以解釋，因此在校对譯稿时在若干地方加了注釋，以利讀者閱讀和翻閱有关文献。

本书題名是“自动控制理論”，但其內容主要是介紹頻率方法在綫性常系数微分方程所描繪运动規律的受控系統中的应用，其数学方法是拉氏和富氏变換。但是作者并沒有把綜合理論全面加以叙述，而后者却是頻率法的精华部分。关于綫性系統的綜合理論可参考文献[14,4]。

自动控制理論中一些新的研究方向，书內沒有包含。为了便于讀者参考，这里做簡单的介紹。

近几年来在控制論的研究中广泛地采用了古典和近代变分法理論，在很多方面已經获得了卓越的成就。像在本书內所指出的，用頻率法研究控制系統时，通常所依据的质量指标是穩定性、过渡时間等。但是，理論上已經証明，用頻率法不能得到最好的控制系統，而只能做一些定性分析。欲寻求按某一质量指标达到最佳程度的系統設計方法，必須应用变分原理。另外，系統穩定性和过渡时間不是評价系統的唯一指标。在很多具体問題中常要求控制系統的每一过渡过程的均方誤差最小，耗能最小，到达某一状态的概率最大等等。关于对任一积分指标的最优控制系統的研究在文献[17]內得到了十分重要的結果：找到了最优控制系統所应具备的必要条件——极大值原理。这一原理的証明不仅部分地解决了高

质量控制系統的設計方法，而且充实和发展了古典变分法的研究方法和研究內容。关于此类問題的进一步研究，讀者可以参考文献[5-10,25-26]，那里对某些綫性或非綫性系統的分析和綜合理論用不同的办法做了一定的研究。但是对非綫性系統的研究尙不够充分，有待于科学工作者的努力。

很多控制系統都在有外部或內部随机干扰的环境下进行工作。如何設計旣具有优良抗干扰性能，又具有上面所指出的某一种最高指标的控制系統是一个十分重要的研究課题。目前对綫性系統和干扰作用的平稳随机过程的抗干扰理論研究已有了显著成績[1,21,22]，这些結果是以 Wiener-Колмогоров 的綫性滤波理論为基础的。在文献[17,27,28]內用其他方法也得到了一些有益的結果。

由于很多控制系統中的控制作用是断續的，特别由于近年来电子数字計算机在控制系統中的应用，故对断續控制系統（或称之为采样系統）各国都做了不少的研究工作。断續系統的綫性理論几乎与連續系統的达到同样完善程度。关于这一方面的問題讀者可参看二本书[18,20]，那里有詳尽的叙述。断續最优系統的研究还刚刚开始，但是已引起各国科学工作者的注意。可以預料，不久将来便会有所进展。

另外，自动控制技术中尙有很多新的理論問題，有待理論工作者深入发掘，抽象出来，得出具有普遍意义的結論。

参考文献

[1] 錢学森：工程控制論，科学出版社，1958.

[2] 張学銘等：微分方程稳定性理論讲义，山东人民出版社，1959.

[3] 秦元勳：运动稳定性的一般問題讲义，科学出版社，1959.

[4] 刘豹：自动控制原理，中国科学图书仪器公司，1954.

[5] 范崇惠：Анализ качества и синтез систем автоматического регу-

лирования с запаздыванием, Автоматика и телемеханика, № 3, 1958.

[6] 張嗣瀛: К теории оптимального регулирования, Прикладная математика и механика, Вып. 3, 1961.

[7] 宋健: Синтез оптимальных систем на основании поля изохрон., Известия АН СССР, Энергетика и автоматика, № 5, 1960.

[8] 宋健: 最优系統的綜合理論。中国自动化学会第一次(天津)会議报告, 1961, 11 月。

[9] 張仁为: Одна задача синтеза оптимальных систем по принципу максимума, Автоматика и телемеханика, 1961, № 10, т. 22.

[10] 范崇惠: 应用 Z 变换理論根据时間特性綜合綫性和非綫性系統, 中国自动化学会第一次(天津)会議报告, 1961, 11 月。

[11] Ляпунов А. М.: Общая задача об устойчивости движения.

[12] Четаев Н. Г.: Устойчивость движения, 1955.

[13] Bellman R.: Stability Theory of Differential Equations, 1953, New York.

[14] Солодовников В. В. 主編: 自动調节原理(王众託譯)。

[15] Фельдбаум А. А.: 电的自动調节系統(章燕申、金兰譯)。

[16] Bode H. W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, New York, V. Nostrand.

[17] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.: Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961.

[18] Цыпкин Я. З.: Теория импульсных систем, Москва, 1958.

[19] Фельдбаум А. А.: Вычислительные устройства в автоматических системах, Москва, 1959.

[20] Tou Tulius T.: Digital and Sampled-data Control Systems, McGraw-Hill, 1959.

[21] Laning Y. H., Battin R. H.: Random Processes in Automatic Control, McGraw-Hill, 1956.

[22] Пугачев В. С.: Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления, Москва, 1957.

[23] Bellman R.: Dynamic Programming, Princeton University, 1957.

[24] Красовский Н. Н.: К теории оптимального регулирования, Прикладная математика и механика, Т. 23, вып. 4, 1959.

[25] Розеноэр Л. И.: Принцип Максимума Понтрягина в теории оптимальных систем, Автоматика и телемеханика, Т. 20, № 10, 11, 12, 1959.

[26] Летов А. М.: Аналитическое конструирование регуляторов, Автоматика и телемеханика, Т. 21 № 4, 5, 6, 1960.

[27] Красовский Н. Н., Лидский Э. А.: Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами, Автоматика и телемеханика, 1961, № 9, 10, 11.

[28] Chow C. K.: An Optimum Character Recognition System Using Decision Functions, IRE Trans. V. EC-6, № 4, 1957.